



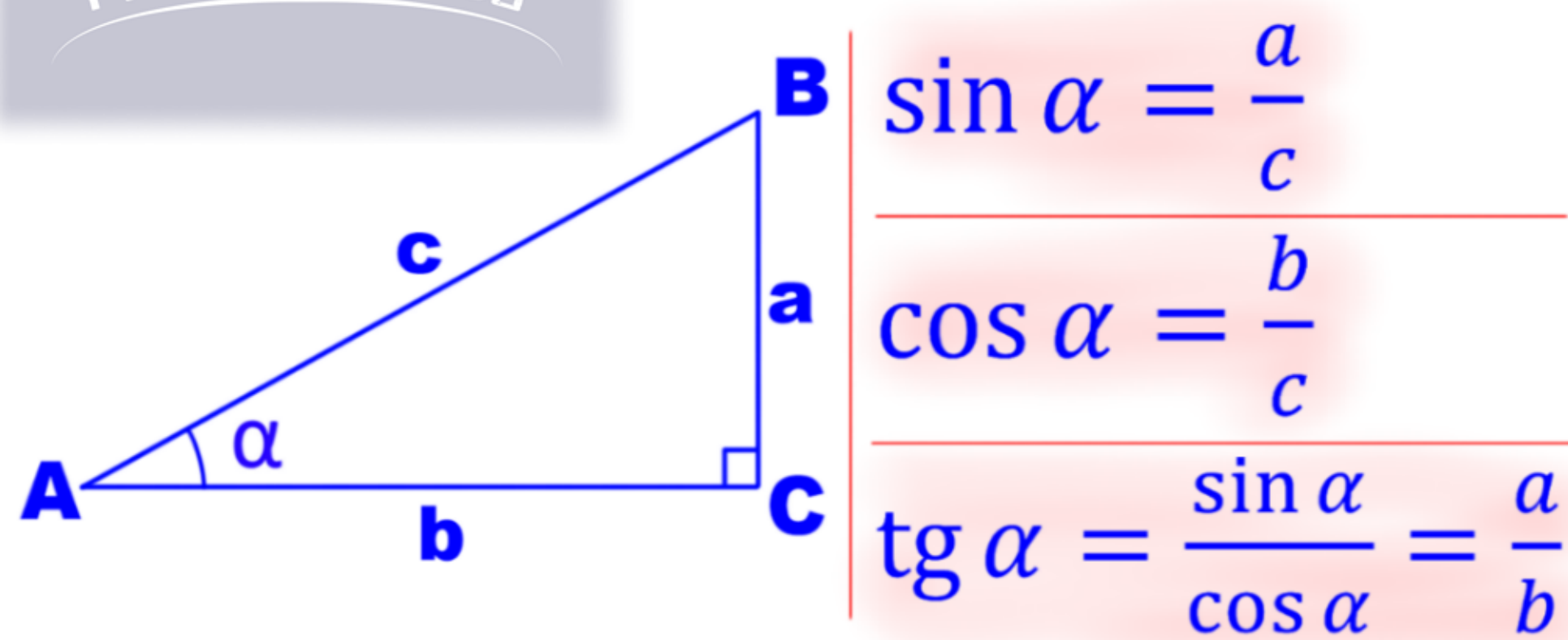
Планиметрия (1 задание)

youtube.com/@ProfessorFOS

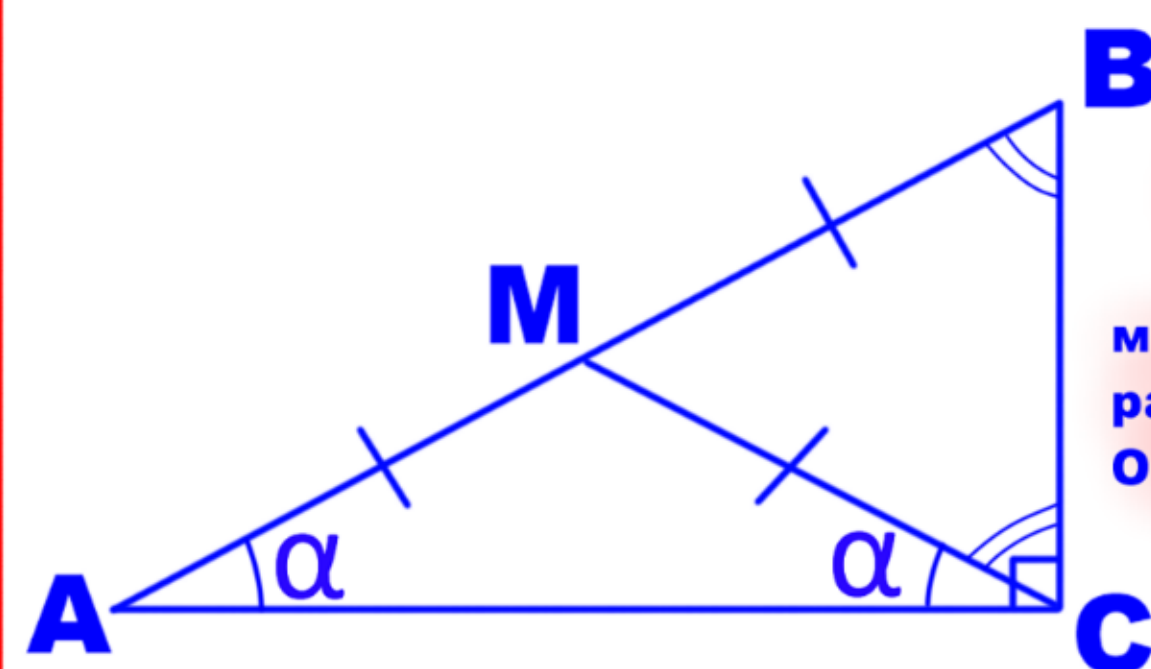
vk.com/professorfos100

t.me/professorfos

Прямоугольные треугольники



$$S = \frac{ab}{2} \quad | \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}$$



AM=MB=MC

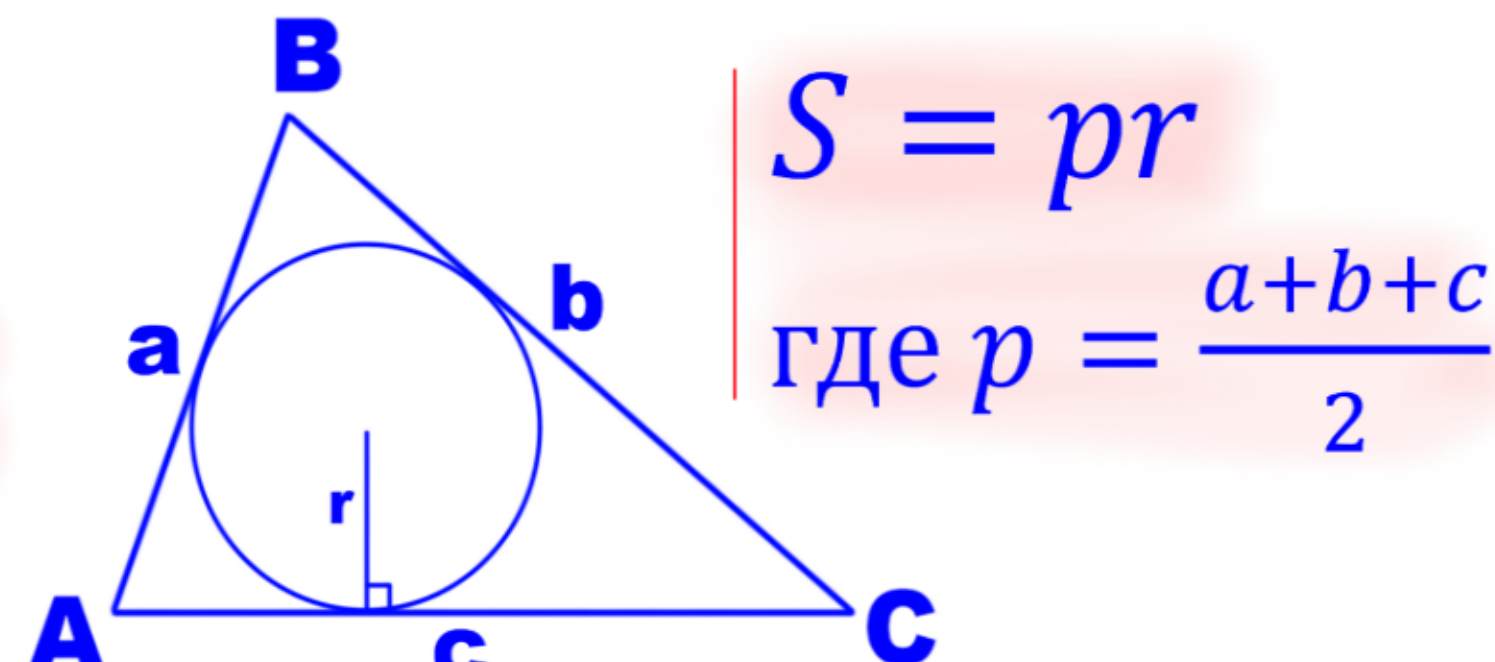
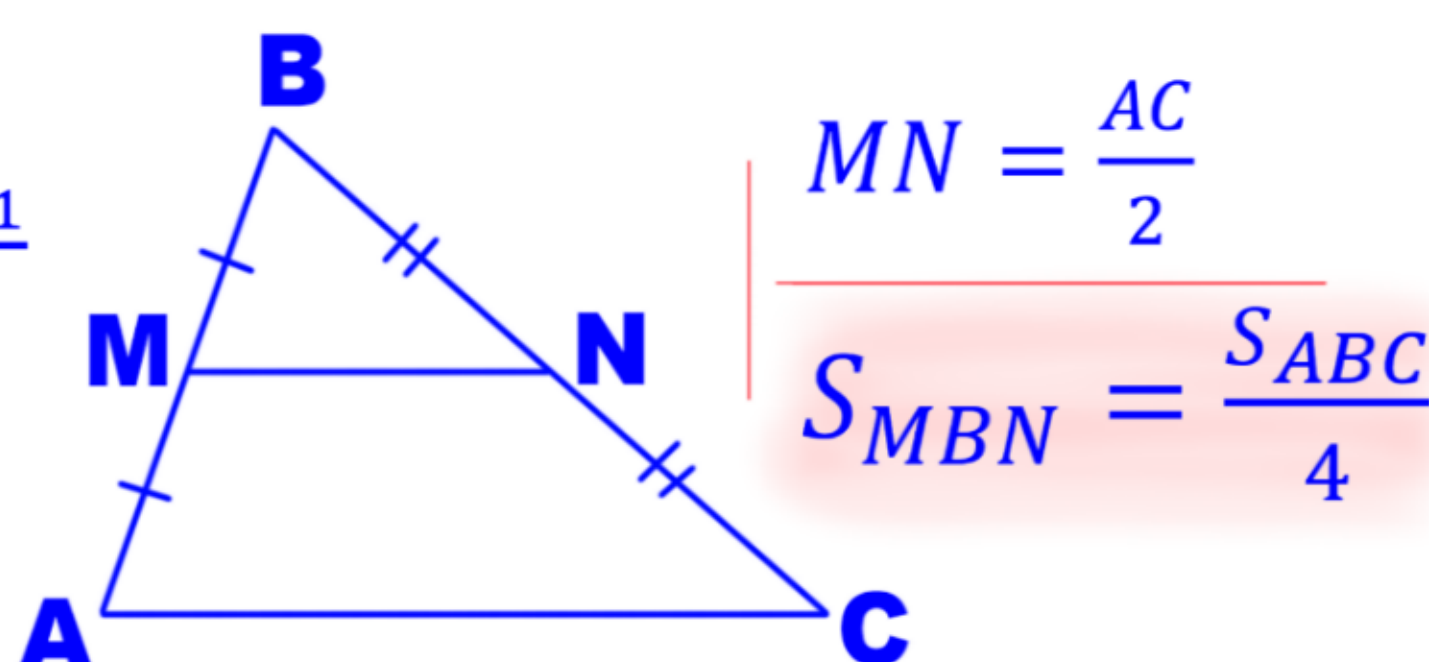
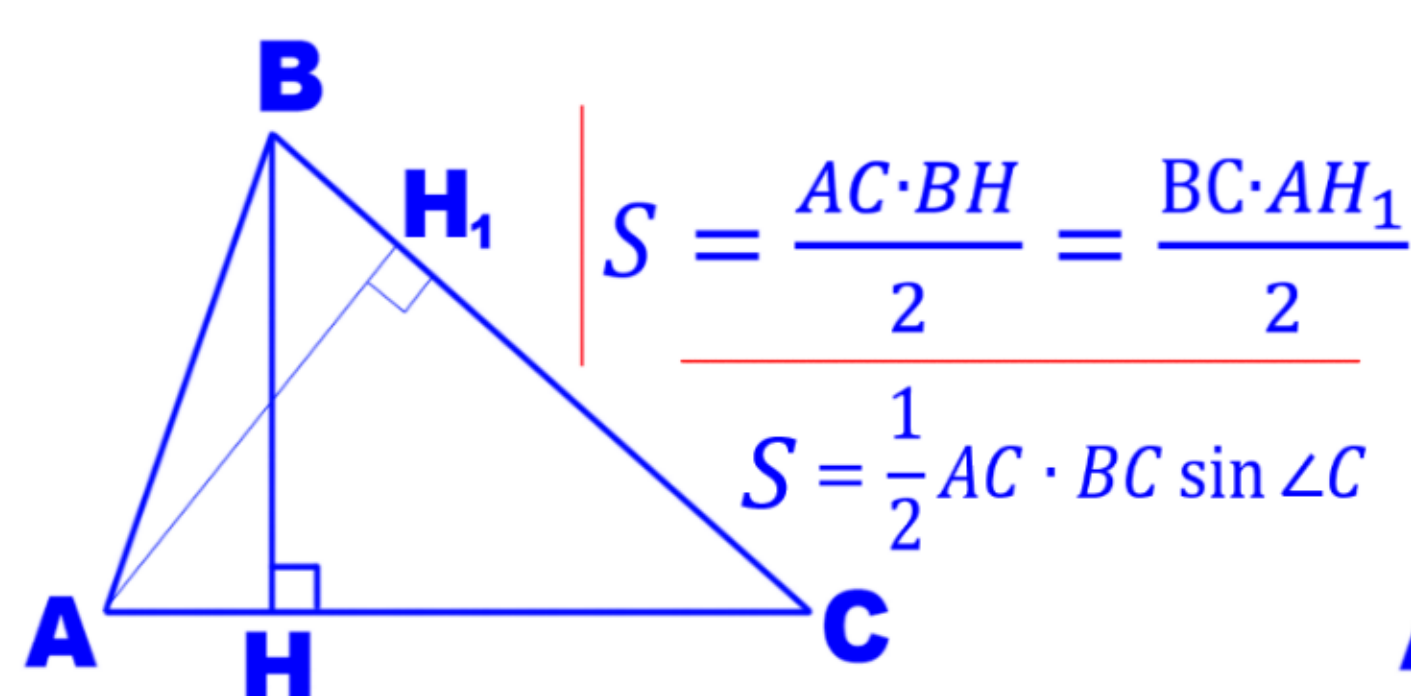
медиана ПРЯМОУГОЛЬНОГО треугольника
равна половине гипотенузы.
Обращай внимание на равные углы

Общие треугольники

Площади

средняя линия

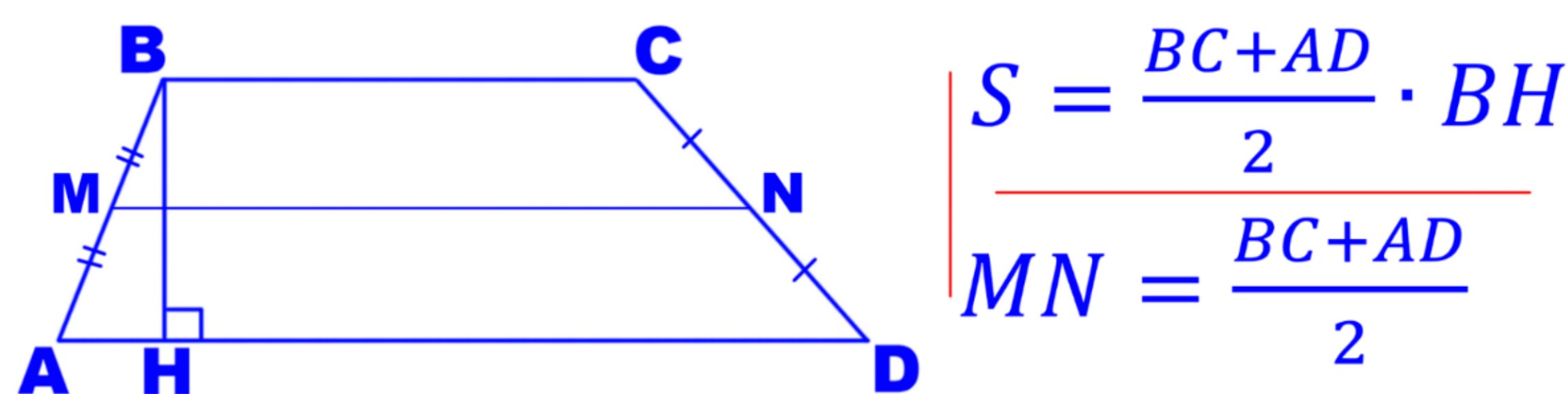
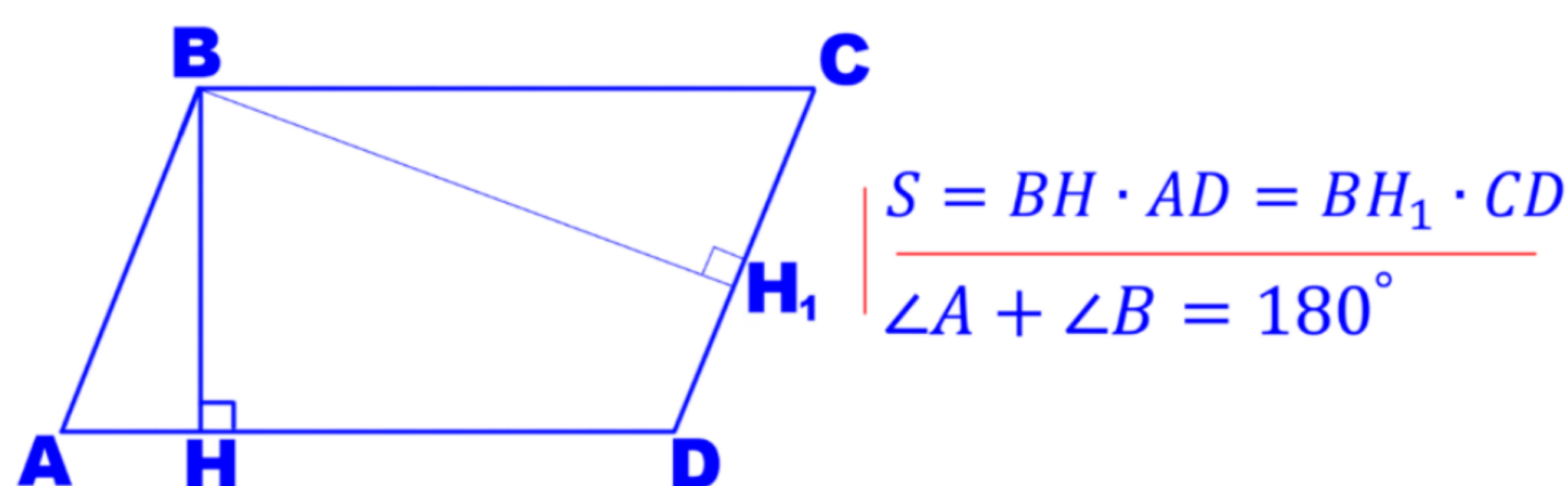
радиус вписанный



Четырехугольники

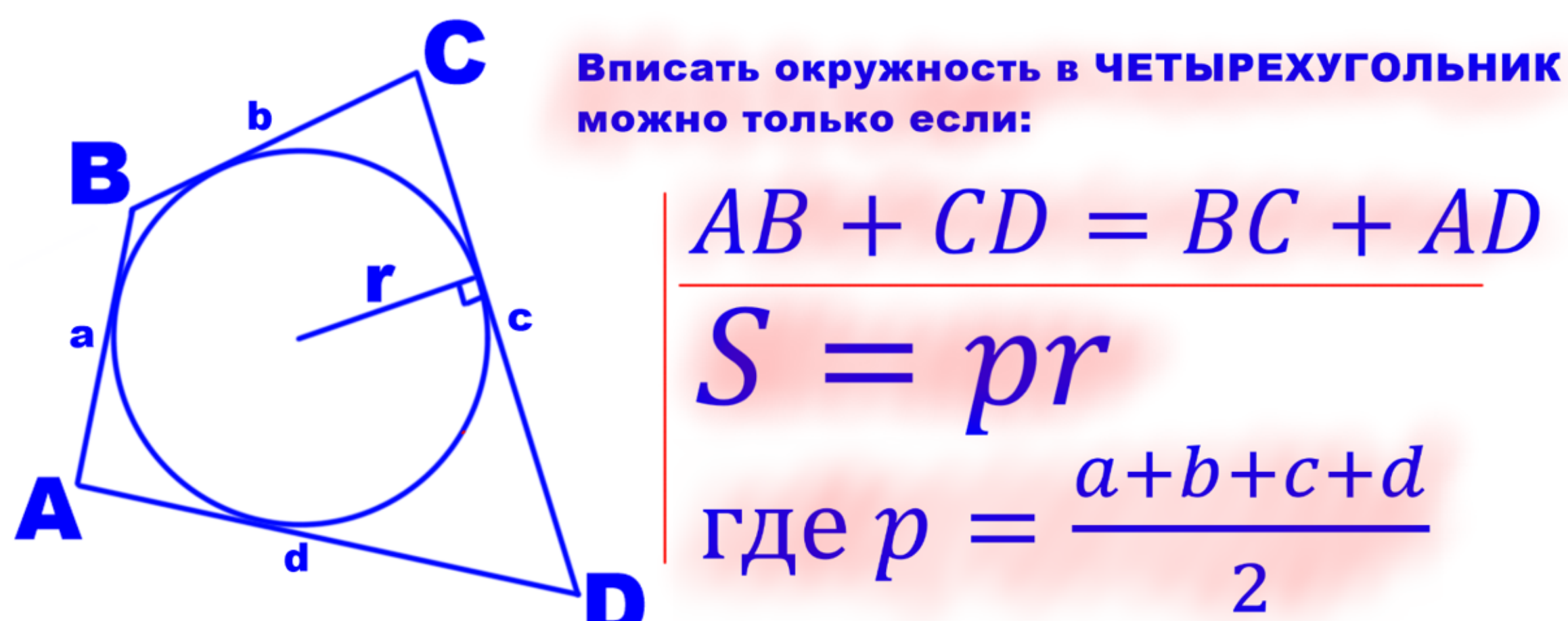
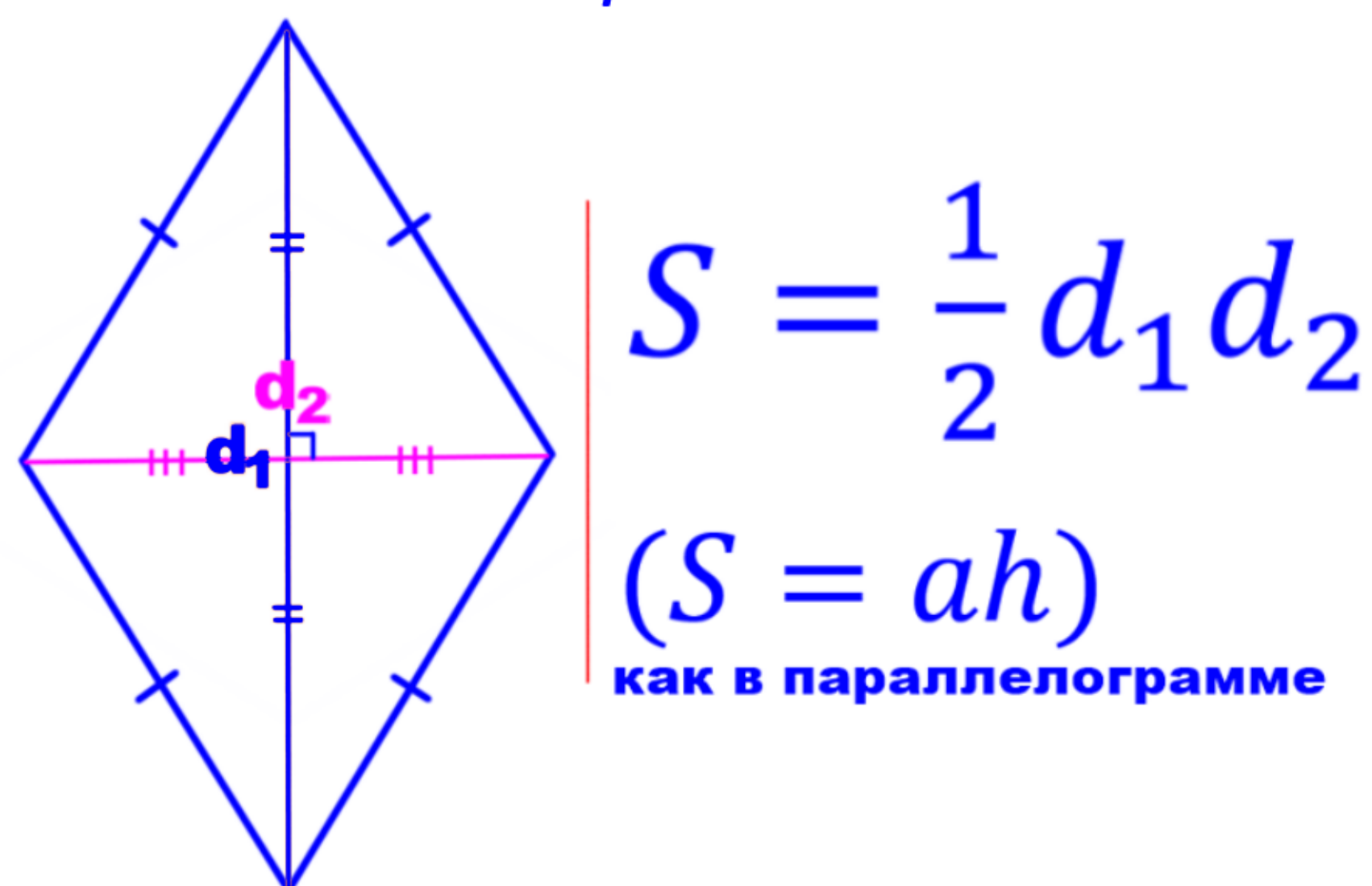
параллелограмм

трапеция

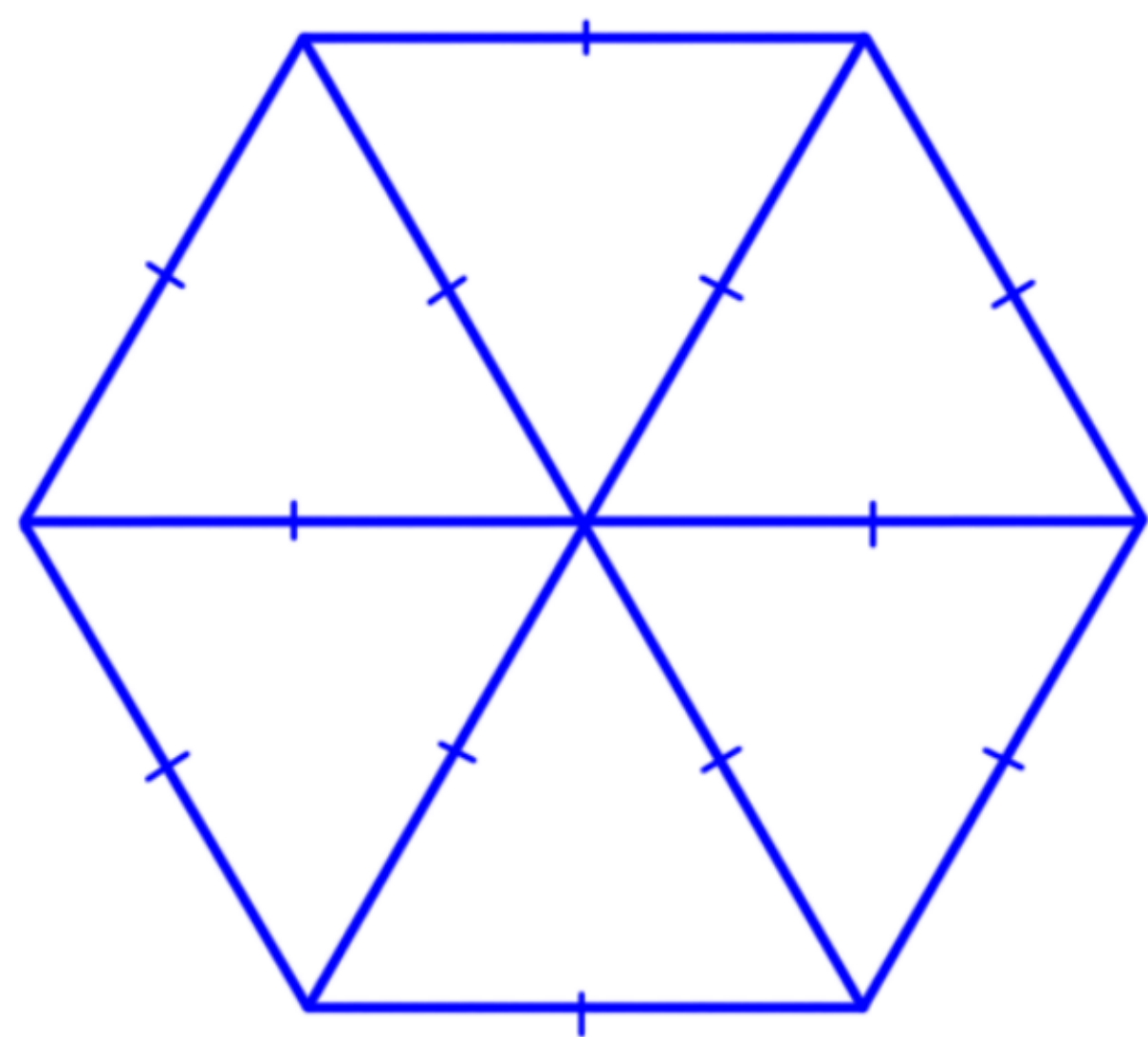


ромб

описанный четырехугольник



Шестиугольник



Шестиугольник простая фигура. Так как все отмеченные стороны равны, он разбит на 6 равносторонних треугольников. Из этого выходят все знакомые тебе свойства. Значит все углы по 60, площадь как 6 правильных треугольников:

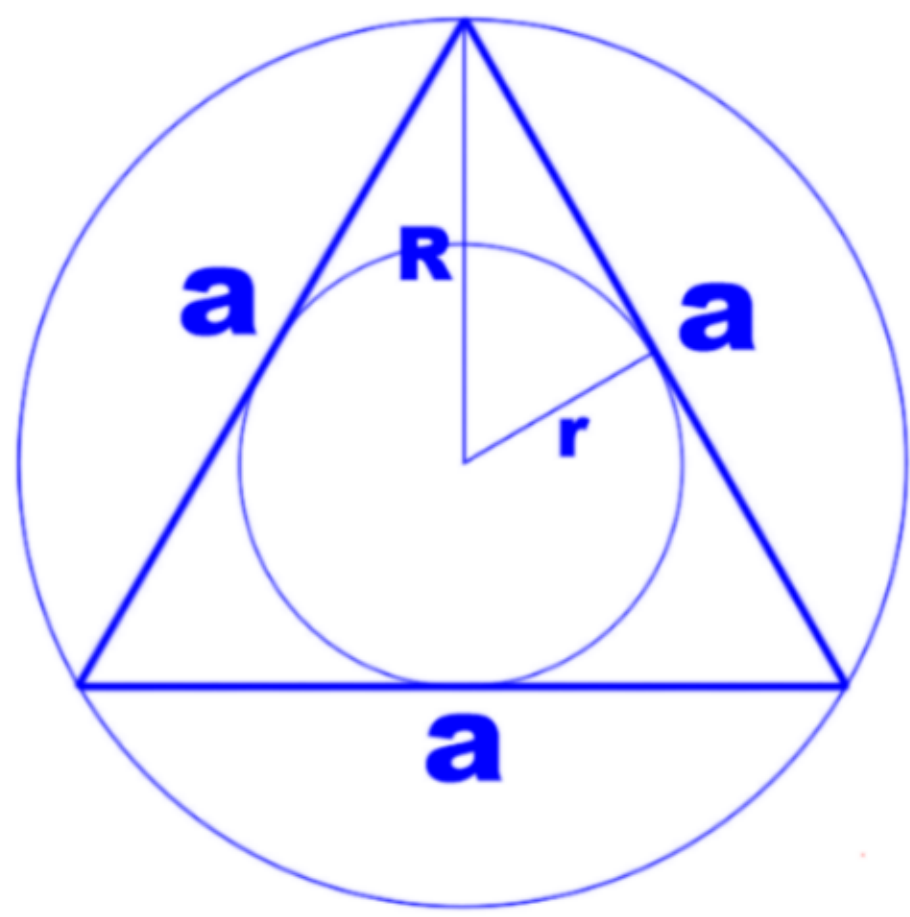
$$S = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$$

Окружности

равносторонний треугольник

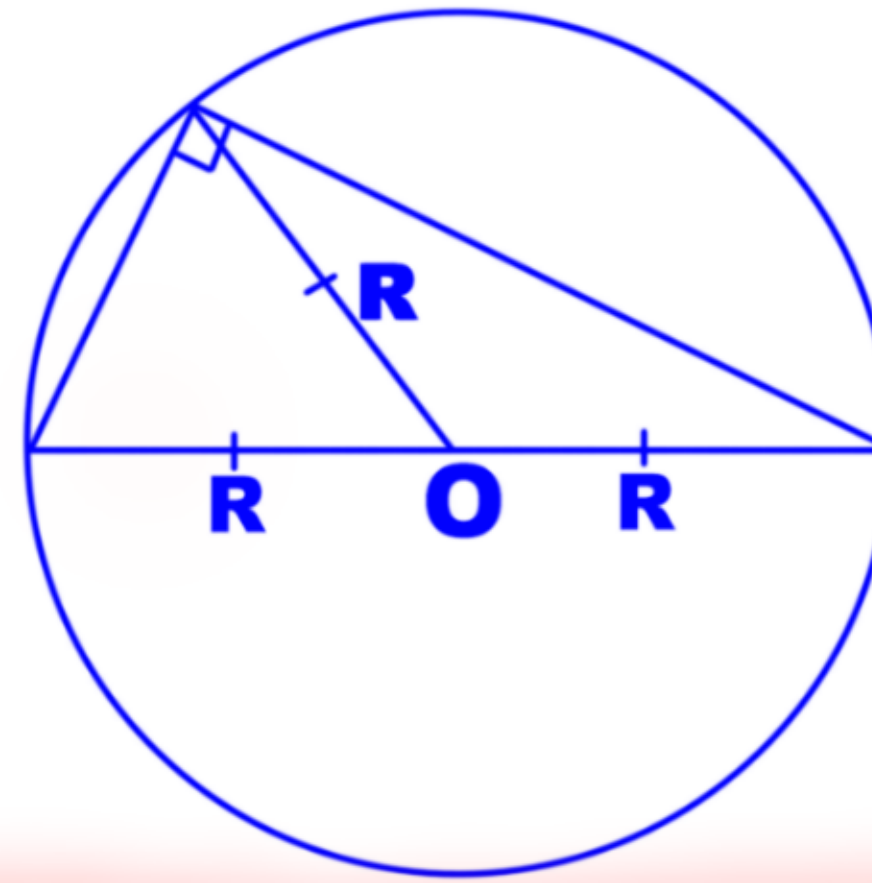
прямоугольный треугольник

теорема синусов

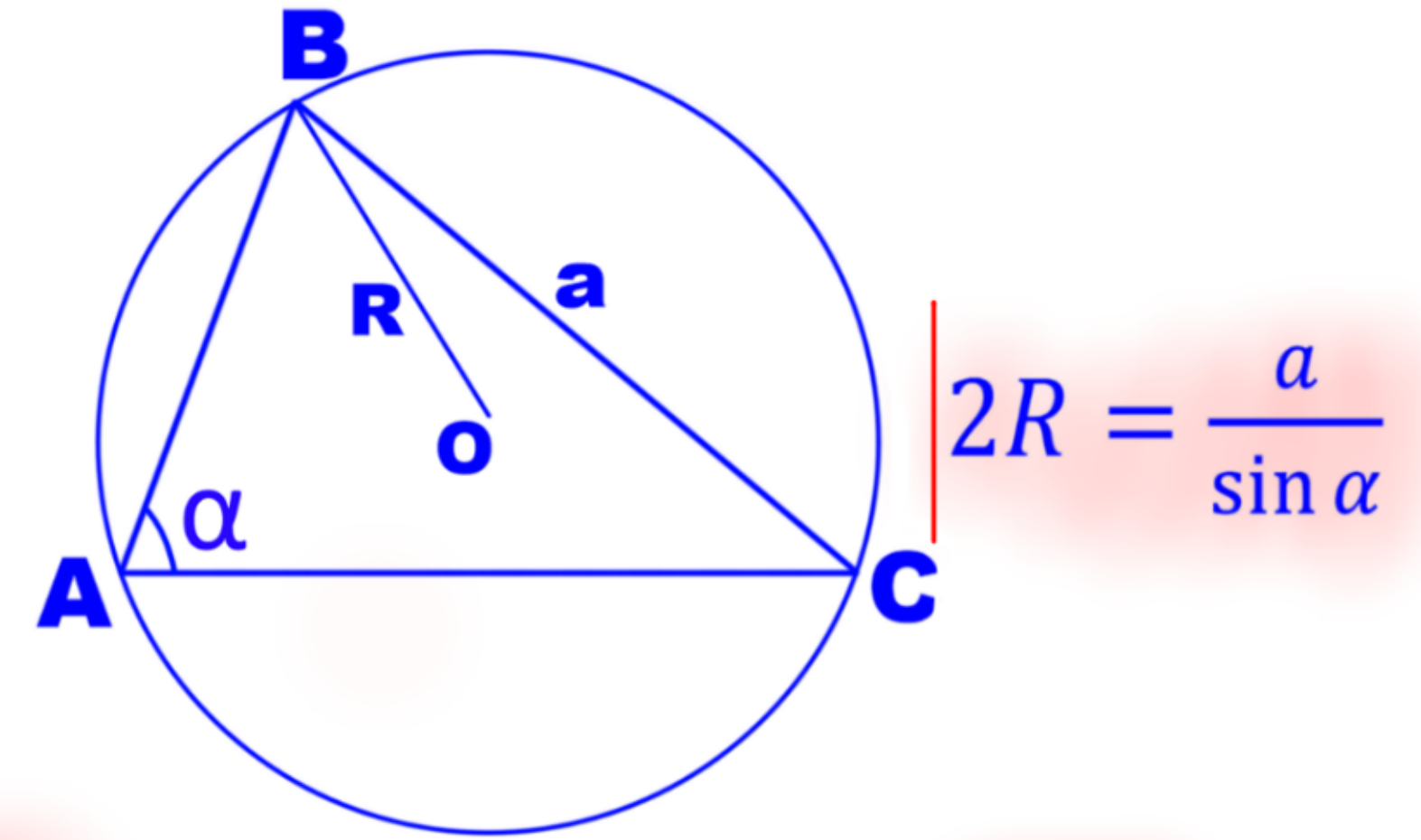


$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \quad h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3} \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

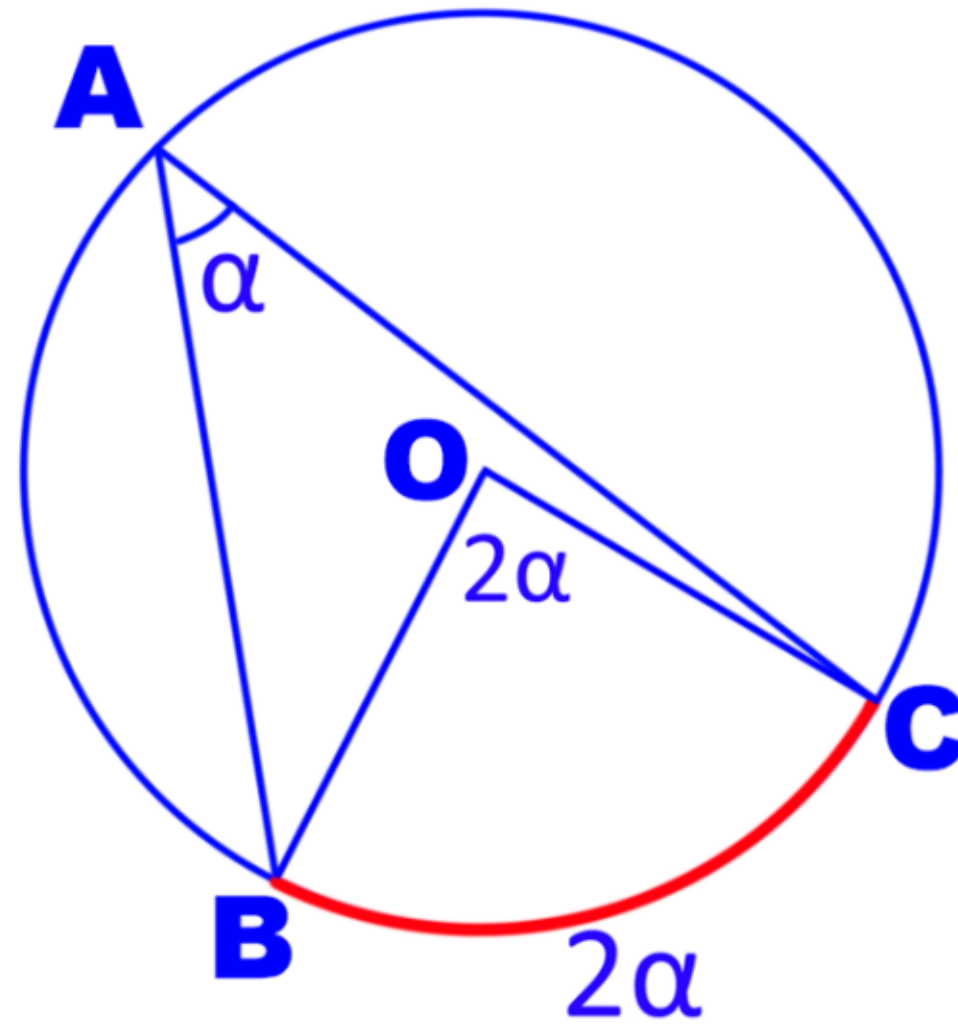
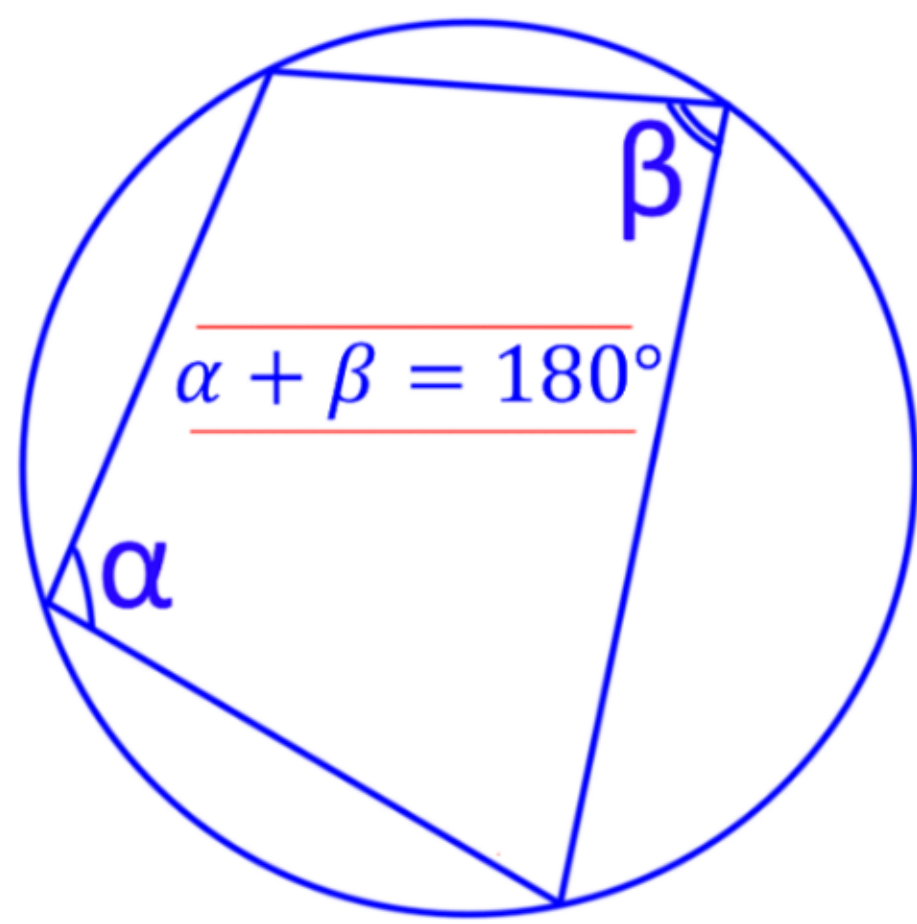


Гипотенуза = диаметр

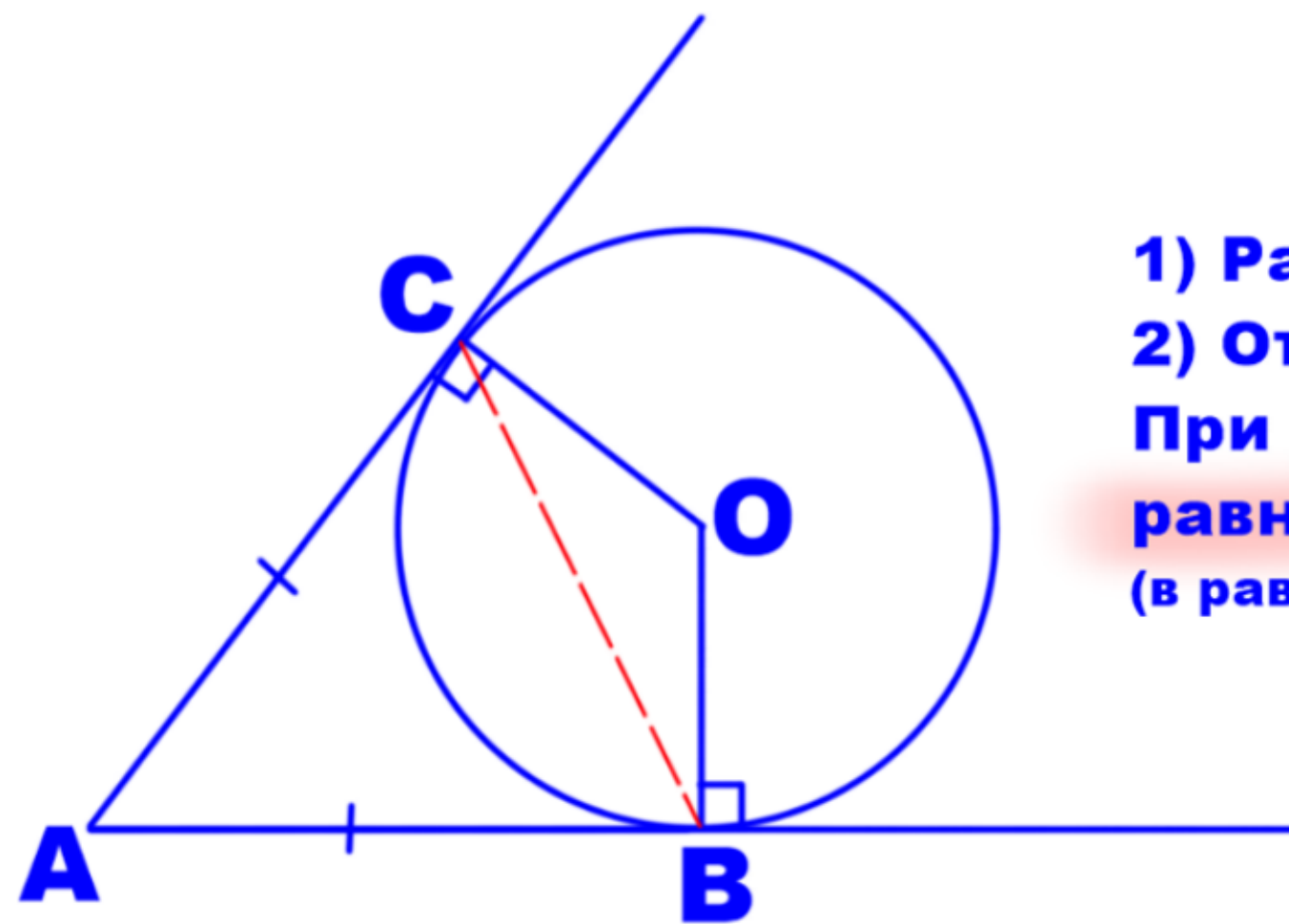
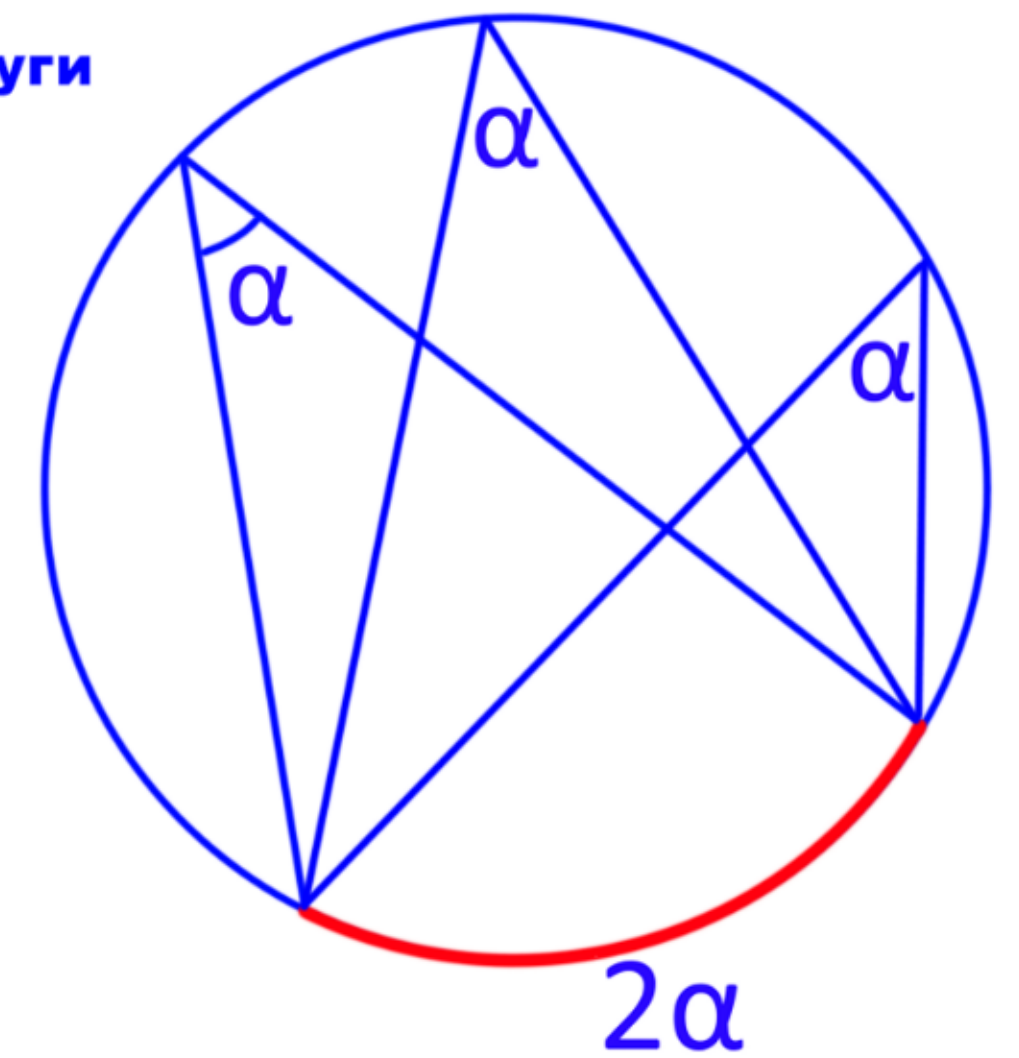


$$2R = \frac{a}{\sin \alpha}$$

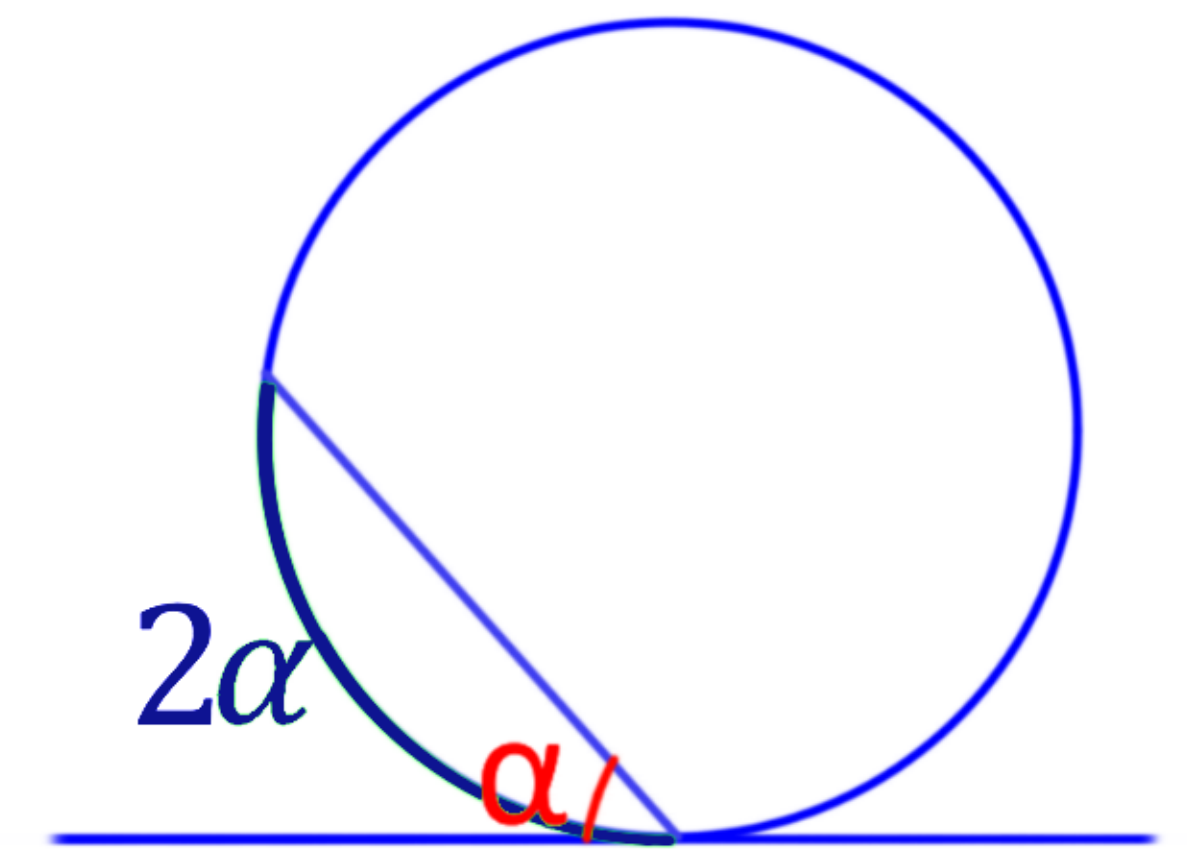
Если нужно найти радиус ОПИСАННОЙ окружности



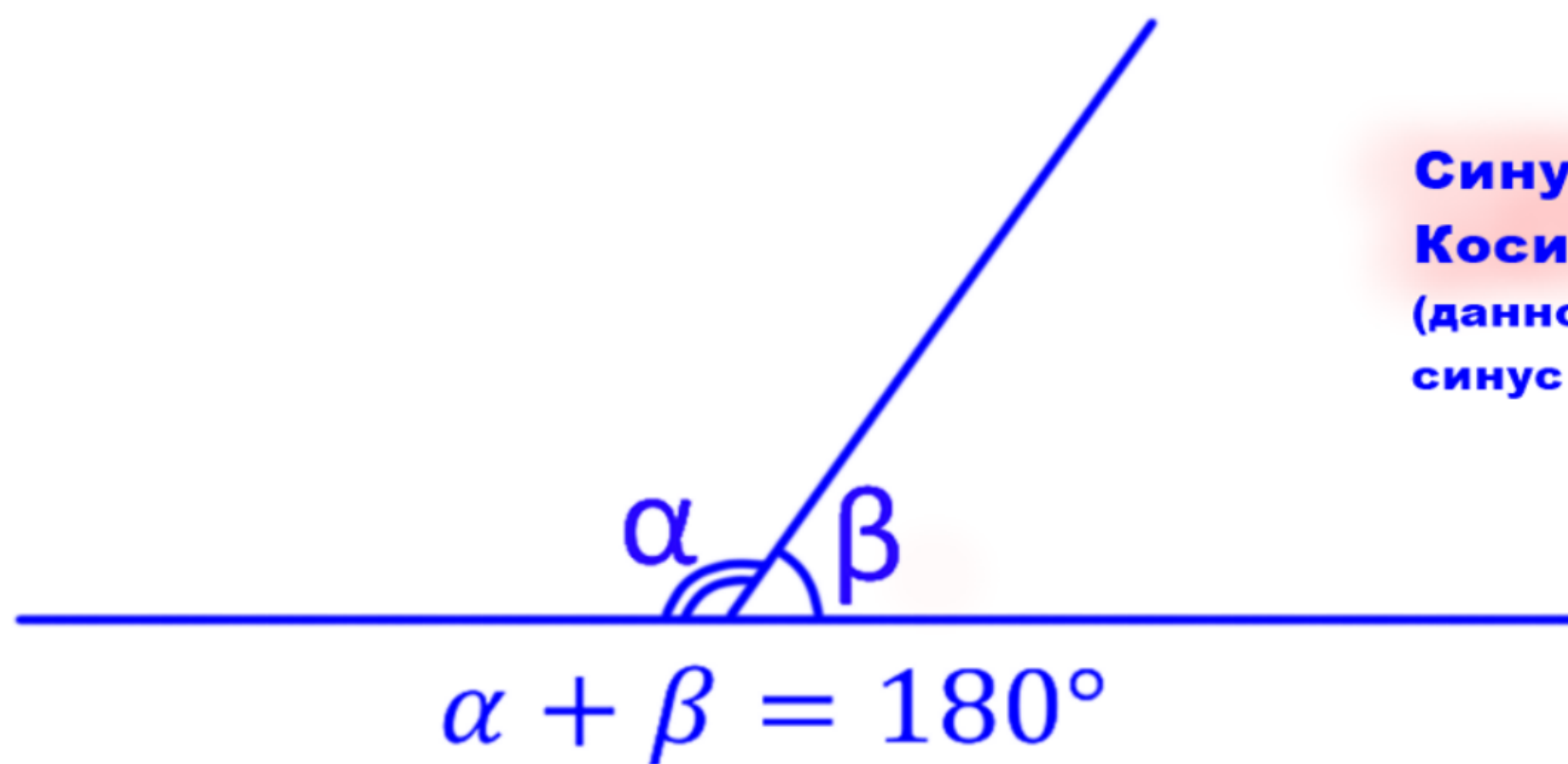
Вписанный угол (BAC) = половине дуги на которую опирается (BC)
Центральный (BOC) = дуге (BC)



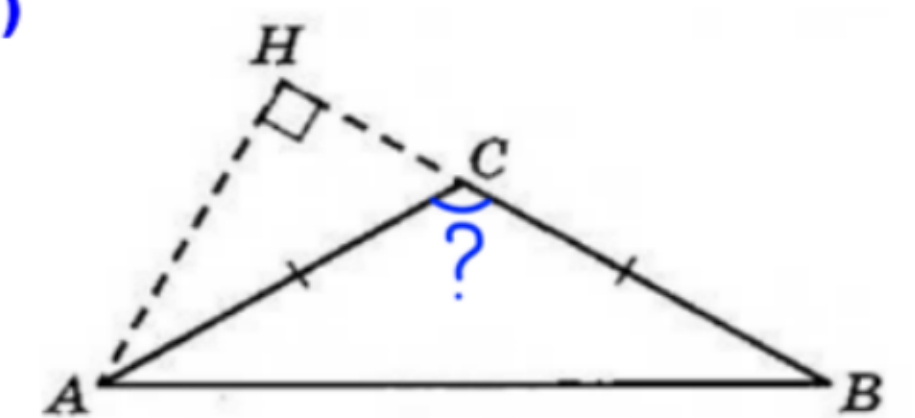
1) Радиусы ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫ касательным.
2) Отрезки касательных Равны.
При решении таких задач ищи прямые углы и равнобедренные треугольники
(в равнобедренных треугольниках углы тоже равны)



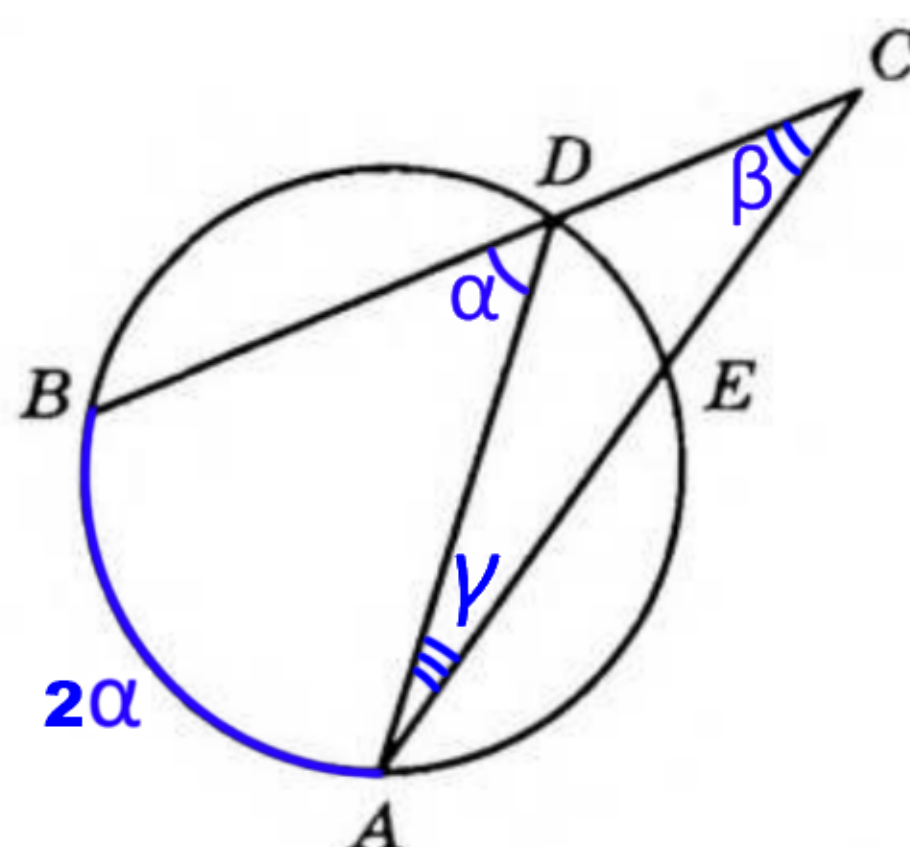
примеры



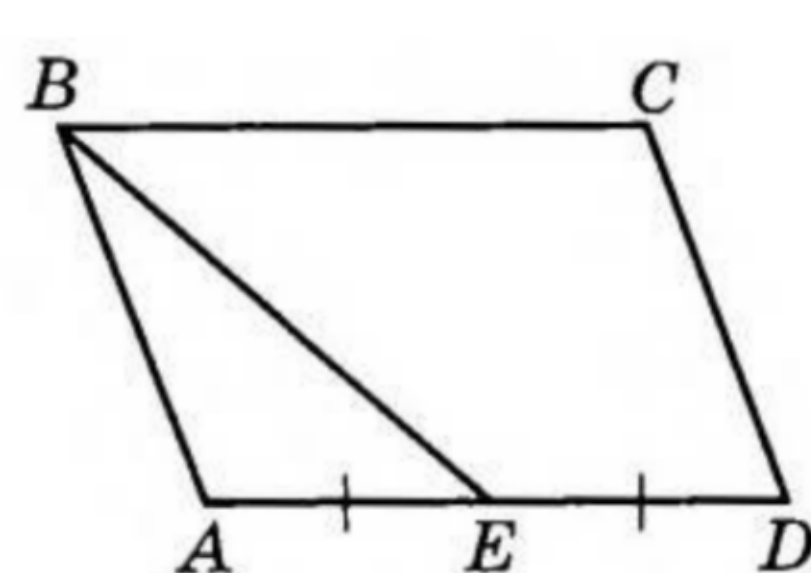
Синусы смежных углов ОДИНАКОВЫ.
Косинусы смежных углов ОДИНАКОВЫ, но с МИНУСОМ.
(данное свойство используется когда можешь найти синус или косинус угла, а нужен смежный)



Очевидное свойство используется даже в окружностях.
Не забывай про это, когда видишь смежные углы

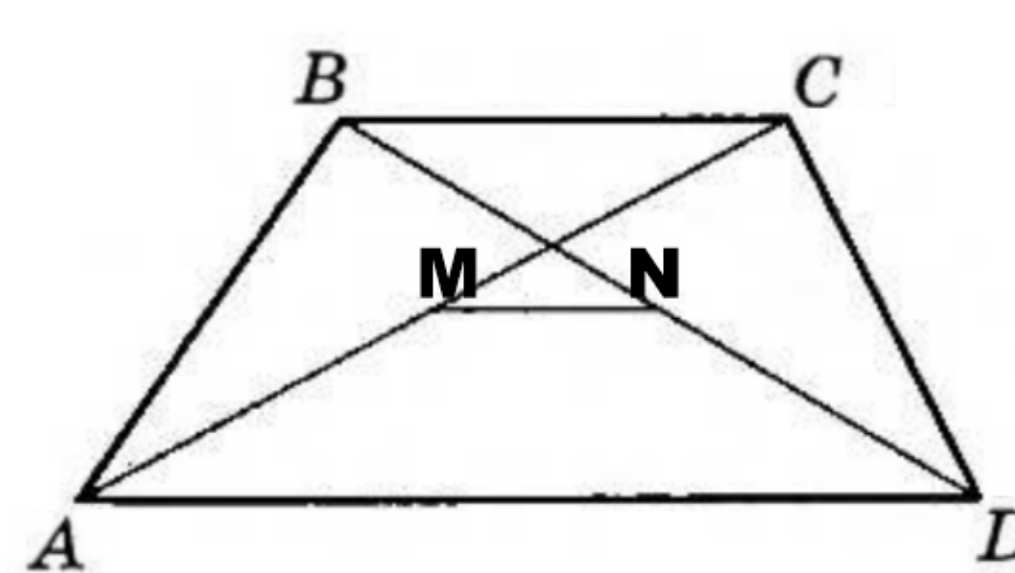


$$\alpha = \gamma + \beta$$

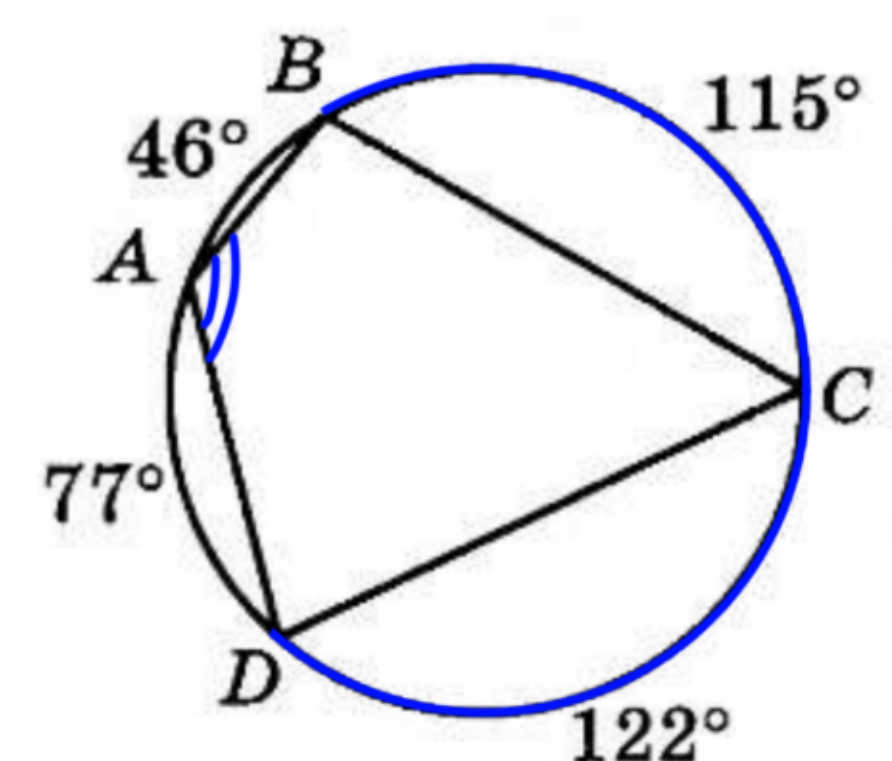


$$S_{ABE} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$$

$$S_{BCDE} = \frac{3}{4} S_{ABCD}$$



$$MN = \frac{AD - BC}{2}$$

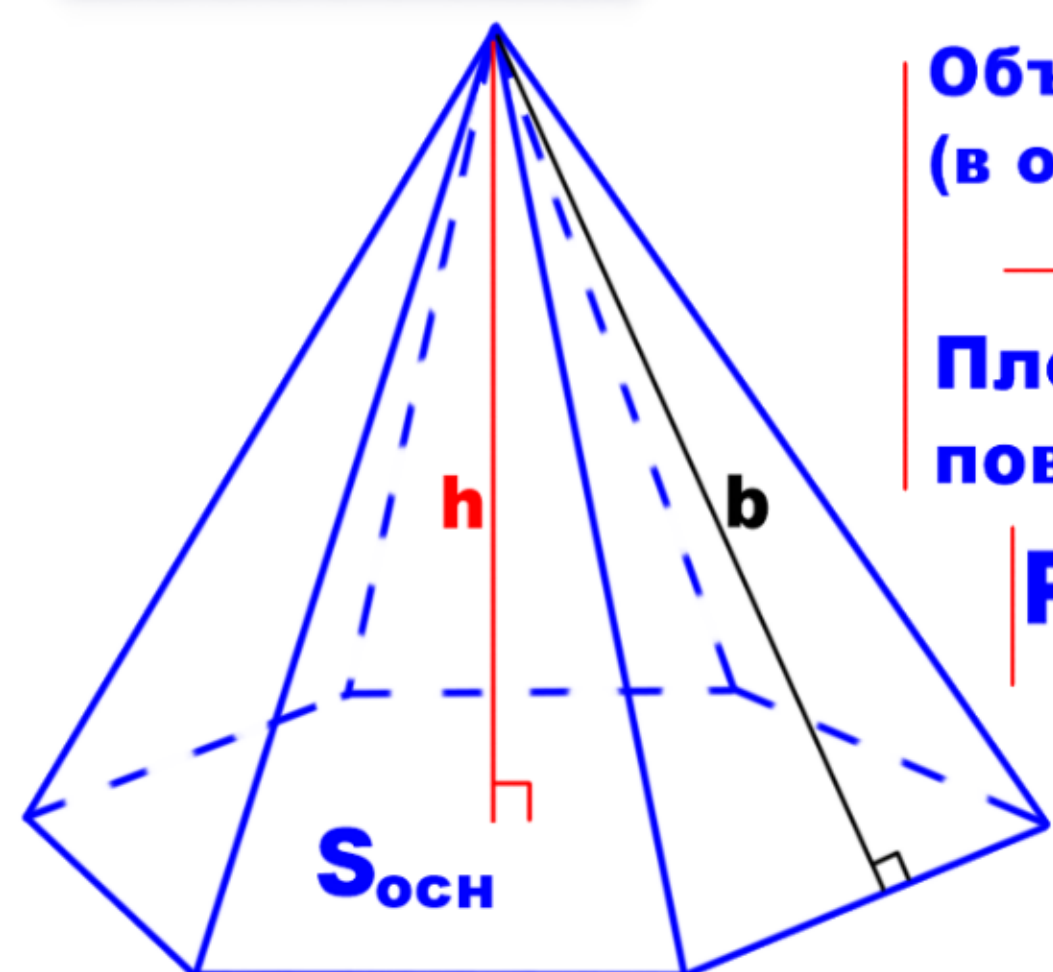


$$\angle A = \frac{115^\circ}{2} + \frac{122^\circ}{2} = 118,5^\circ$$



Стереометрия (3 задание)

Пирамиды



Объем ЛЮБОЙ пирамиды
(в основании любая фигура):

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$$

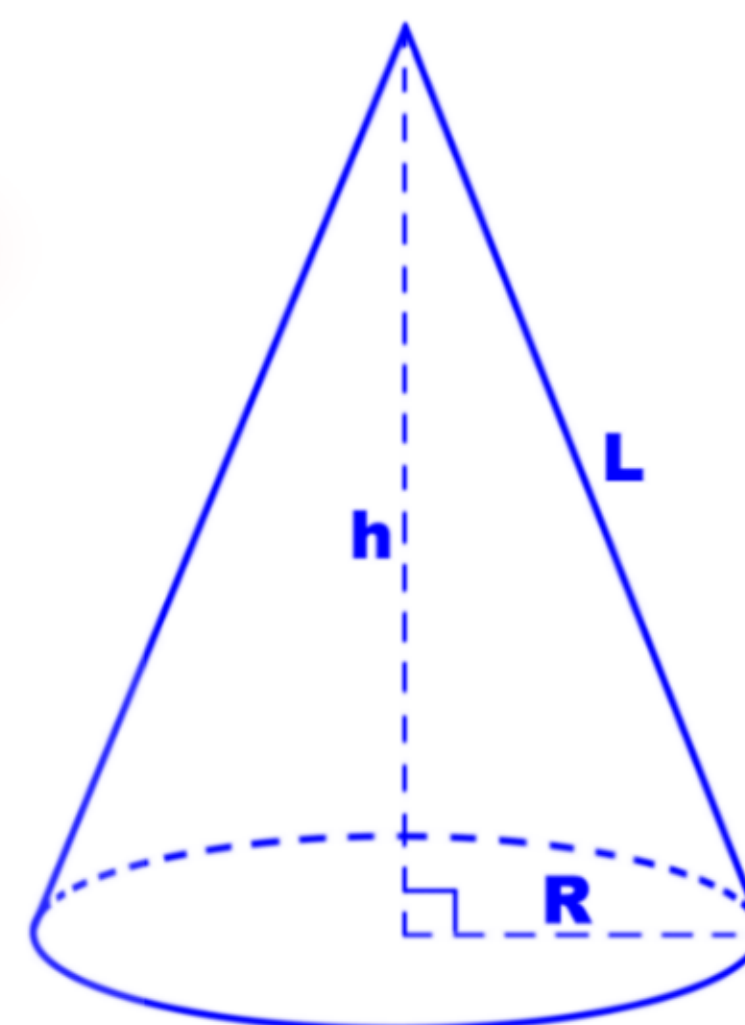
Площадь БОКОВОЙ
поверхности пирамиды:

$$S_{\text{бок}} = \frac{P}{2} b$$

P - периметр (**S**_{бок} всегда сумма **S** треугольников)

$$(S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}})$$

Конус

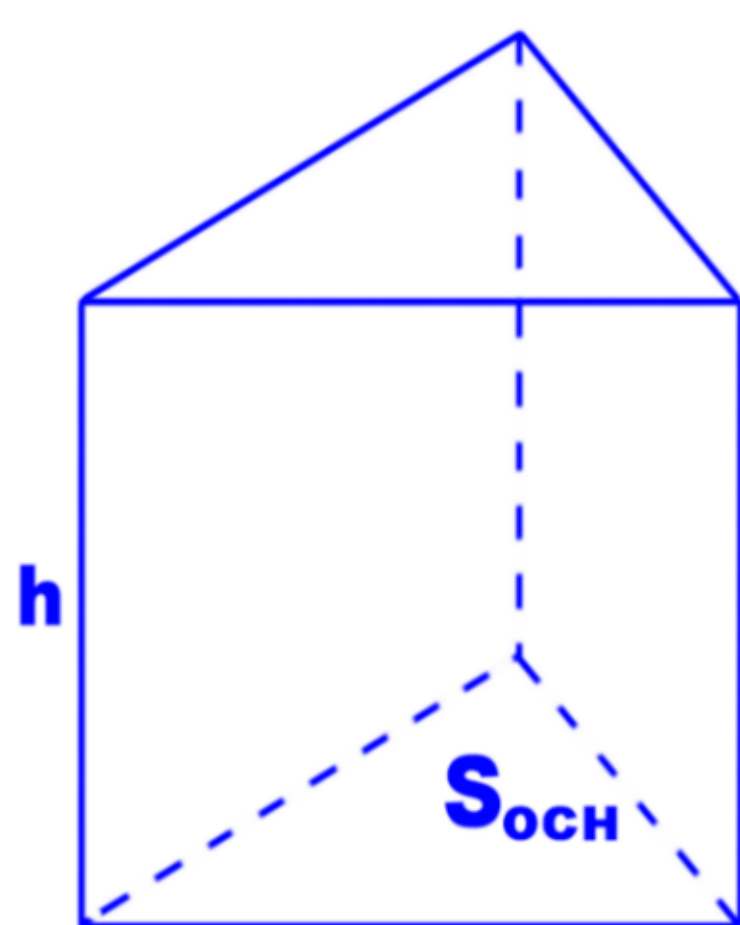


$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

$$S_{\text{бок}} = \pi R L$$

$$L^2 = R^2 + h^2$$

Призмы



Объем ЛЮБОЙ призмы: $V = S_{\text{осн}} \cdot h$

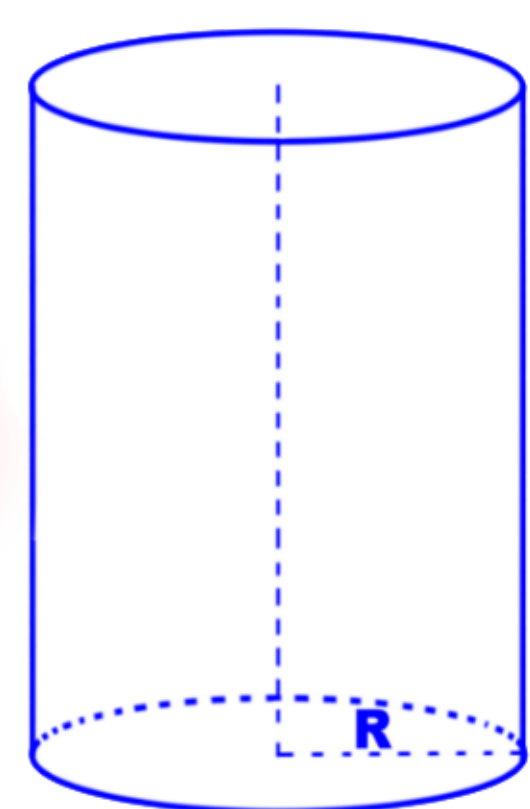
Площадь боковой поверхности: $S_{\text{бок}} = Ph$

P - периметр.

(Площадь боковой поверхности, сумма площадей
обычных прямоугольников)

$$(S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}})$$

Цилиндр



$$V = \pi R^2 h$$

$$S_{\text{бок}} = 2\pi R h = lh$$

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2\pi R^2$$

l — длина окружности

Параллелепипеды

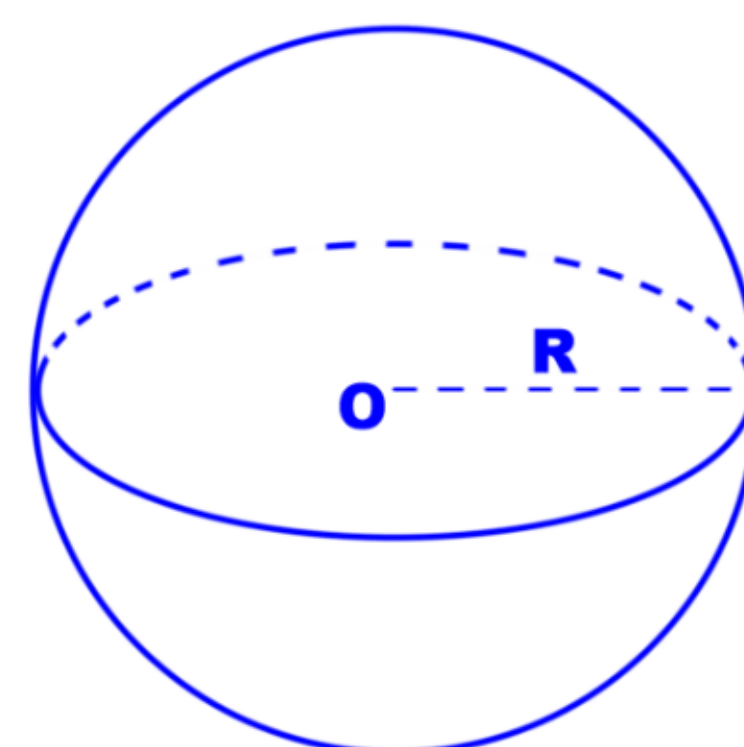
Объем куба: $V = a^3$

Объем параллелепипеда: $V = abc$

Диагональ параллелепипеда: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

**КУБ и ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД - тоже призмы. Значит
правила для них те же, что и для любой призмы.**

Шар

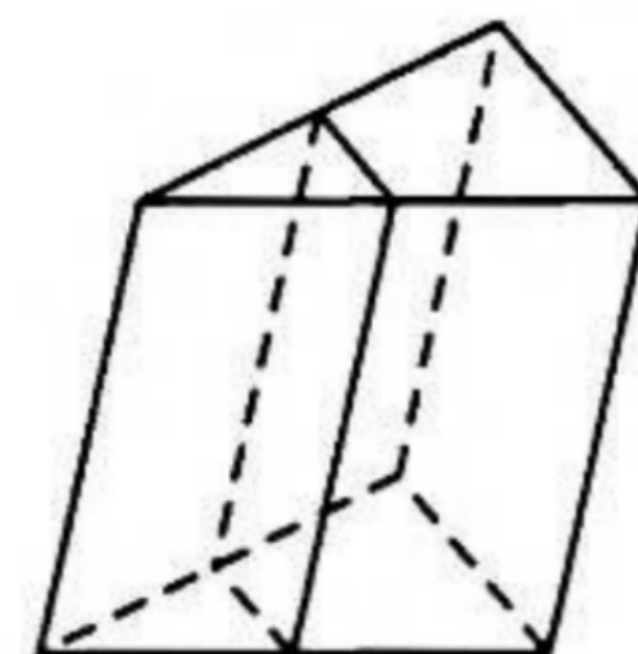
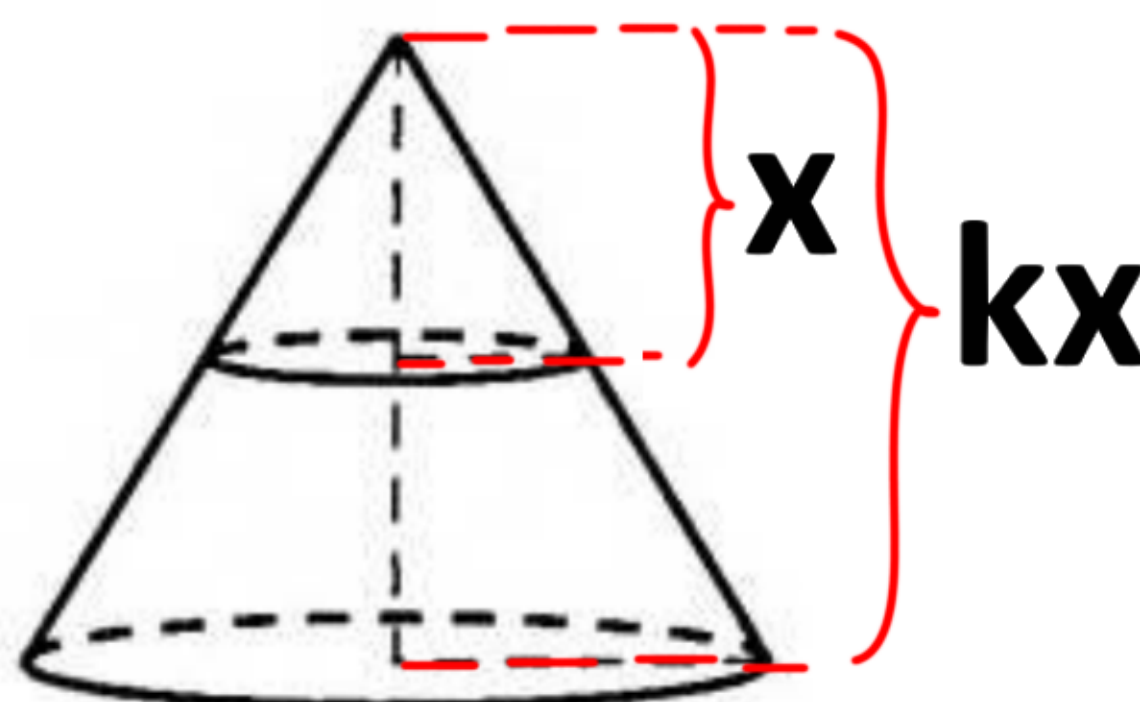
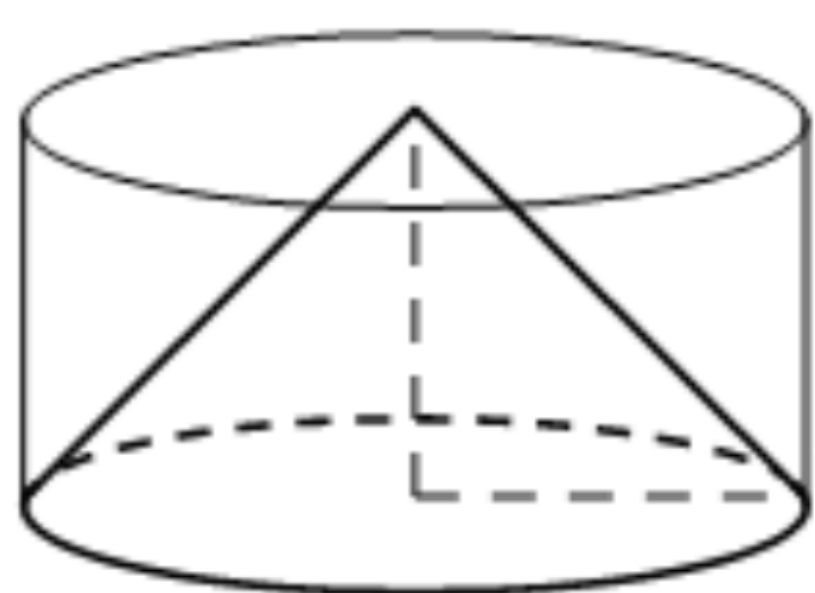
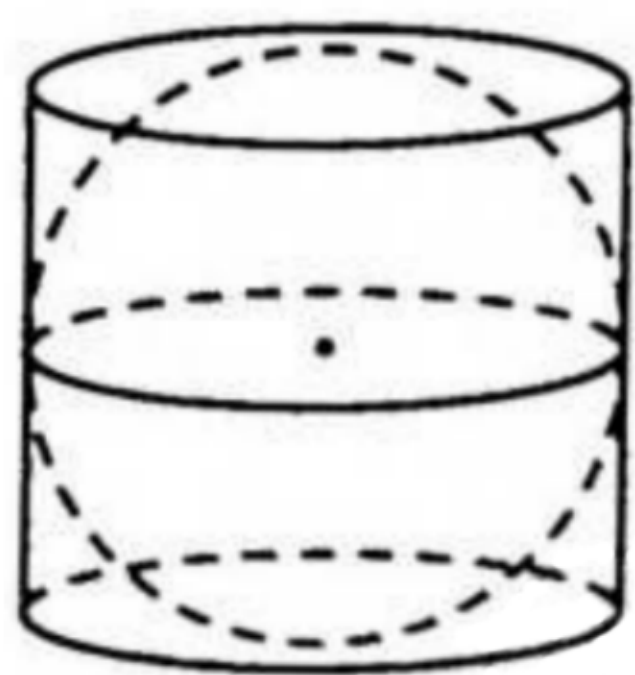


$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$S = 4\pi R^2$$

Если одно тело, вписано в другое (например шар в куб, шар в цилиндр, конус в цилиндр и т.д.) обращай внимание на одинаковые величины и выражай их. У них будут общие стороны, радиусы, высоты и т.д., которые ты используешь для нахождения объемов и площадей.

п р и м е р ы



$$V_{\text{цил.}} = 1.5V_{\text{шар}}$$

$$V_{\text{ц}} = 3V_{\text{кон}}$$

$$V_{\text{бол}} = k^3 V_{\text{мал}}$$

$$V_{\text{бол}} = 4V_{\text{мал}}$$

$$S_{\text{ц.полн}} = 1.5S_{\text{шара}}$$

$$S_{\text{ц}} = \sqrt{2}S_{\text{кон}}$$

$$S_{\text{бол}} = k^2 S_{\text{мал}}$$

$$S_{\text{бок.Бол}} = 2S_{\text{бок.Мал}}$$

ВЕКТОРЫ (2 задание)

Координаты вектора:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a} = (x; y) = (x_B - x_A; y_B - y_A)$$

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_a \pm x_b; y_a \pm y_b) \quad \left| \quad k \cdot \vec{a} = (k \cdot x_a; k \cdot y_a) \right.$$

Длина (модуль) вектора:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Скалярное произведение векторов:

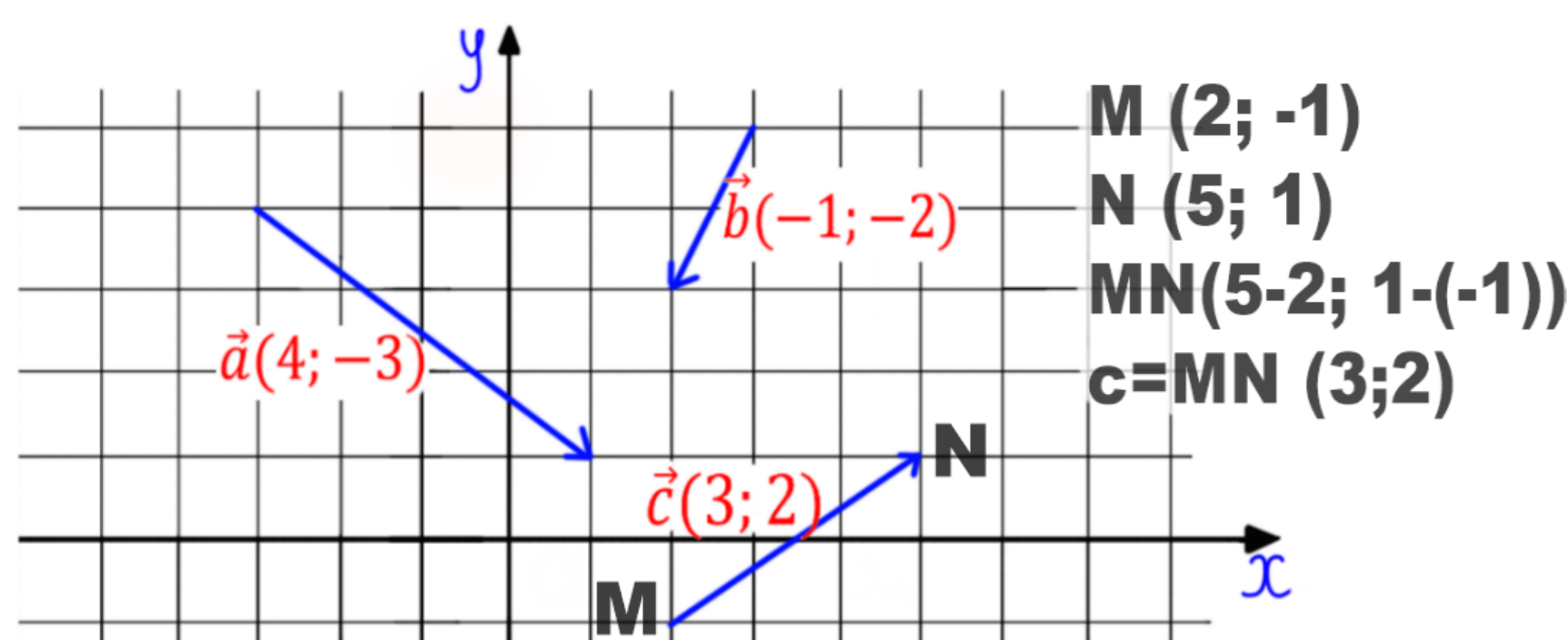
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha \quad (\text{или } \cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|})$$

Угол между векторами:

$$\cos \alpha = \frac{x_a x_b + y_a y_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2} \sqrt{x_b^2 + y_b^2}}$$

Пример определения координат вектора



Чтобы узнать координаты векторов нужно из координат (x; y) КОНЦА вектора вычесть соответственно (x; y) начала вектора.

ЛОГАРИФМЫ

$$\log_a 1 = 0$$

$$a > 0, b > 0, c > 0$$

$$1. \log_a a = 1$$

$$2. \log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

$$3. \log_a b^m = \frac{1}{m} \cdot \log_a b \quad \left. \begin{array}{l} \log_a b^n = n \cdot \log_a b \\ \log_a b^m = \frac{1}{m} \cdot \log_a b \end{array} \right\} \log_a b^n = \frac{n}{m} \cdot \log_a b$$

$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c$$

$$4. \log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

$$5. a^{\log_a b} = b$$

$$6. \log_a b = \frac{1}{\log_b a} \Rightarrow \log_a b \cdot \log_b a = 1$$

$$7. \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

8. Свойства могут использоваться в обратную сторону!

СТЕПЕНИ

$$1. a^0 = 1$$

$$2. (ab)^n = a^n b^n$$

$$3. \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$4. a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{или} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

$$5. a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$6. \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$7. (a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$8. \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \quad (\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}})$$

Свойства могут использоваться в обратную сторону!

Формулы сокращенного умножения

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$\sqrt{\text{выражение}} = \text{ответ}$$

Ответ ≥ 0 , отрицательные не брать!

ВЕРОЯТНОСТИ (4-5 задания)

1. Простые вероятности $P = \frac{\text{кол-во нужных исходов}}{\text{общее число исходов}}$ встречаются в 4 задаче. Редко в 5 задаче на кубики в виде: $P = \frac{\text{нужная вероятность}}{\text{общая вероятность}}$

2. задачи такого типа:

Вероятность того, что на тестировании по физике учащийся К. верно решит больше 9 задач, равна 0.79. Вероятность того, что К. верно решит больше 8 задач, равна 0.85. Найдите вероятность того, что К. верно решит ровно 9 задач. решаются вычитанием из большей вероятности меньшей (0.85-0.79=0.06)

3. В задачах на монетки или жребии перед каким-то матчем стоит расписать все возможные исходы выпадения орлов и решек и посчитать

$$P = \frac{\text{кол-во нужных исходов}}{\text{общее число исходов}}$$

4. В 5 задачах как правило можно использовать правило И ИЛИ: если между событиями можно вставить ИЛИ, то их вероятности складываются. Если можно вставить И, то вероятности перемножаем. Чаще нужно использовать оба правила сразу.

5. Автоматы, кофемашины:

В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0.25. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0.1. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

$$P(a+b) = P(a) + P(b) - P(ab) = 0.25 + 0.25 - 0.1 = 0.4 \quad \text{Ответ: } 1 - 0.4 = 0.6$$

6. Если в задаче все величины даны в %, то можно взять конкретное число, например, 1000 и вычислять задачу с конкретными числами. ИЗИ=)

7. При выпечке хлеба..... вероятность того, что масса окажется меньше 815 г, равна 0,97..... больше 780 г, равна 0,84. Найдите вероятность... больше 780 г, но меньше 815 г. $0,97 + 0,84 - 1 = 0,81$

8. Батарейки... Автоматическая линия..... Вероятность не исправна 0,01 (исправна 1-0,01=0,99 находишь сам).

Вероятность того, что забракует не исправную 0,94. Что по ошибке забракует исправную 0,04. Найдите вероятность того, что батарейка будет забракована: не испр. И забрак. ИЛИ испр. И забрак. $0,01 \cdot 0,94 + 0,99 \cdot 0,04 = 0,049$

ПРОИЗВОДНАЯ (12 задание)

Правила производных (дифференцирования)

$$(c \cdot f)' = c \cdot (f)'$$

(но! Отдельная константа: $c'=0$)

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$(f(g(x)))' = (f(g))' \cdot (g(x))'$ - производная сложной функции берется поэтапно.

Пример производной от сложной функции:

$$(e^{-x})' = e^{-x} \cdot (-x)' = -e^{-x}$$

$$(\ln 18x)' = \ln'(18x) \cdot (18x)' = \frac{1}{18x} \cdot 18 = \frac{1}{x}$$

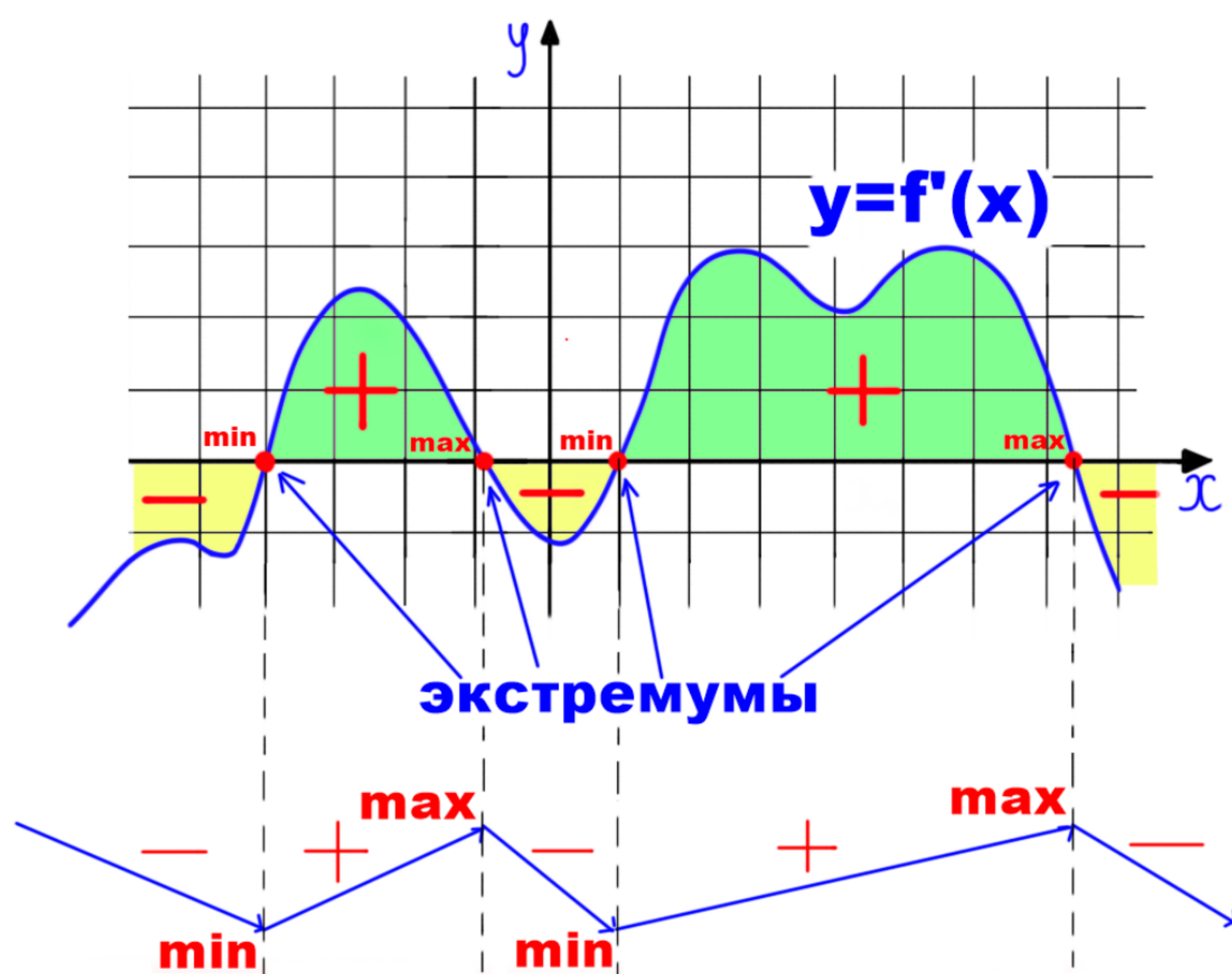
Таблица производных

- $c' = 0$
 - $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ частные случаи $\begin{cases} (x)' = 1 \\ (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ (x\sqrt{x})' = \frac{3}{2}\sqrt{x} \end{cases}$
 - $(e^x)' = e^x$
 - $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
 - $(\sin x)' = \cos x$
 - $(\cos x)' = -\sin x$
 - $(a^x)' = a^x \ln a$
 - $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
 - $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
- эти и другие выражение по свойствам степеней можно представлять как (x^n)

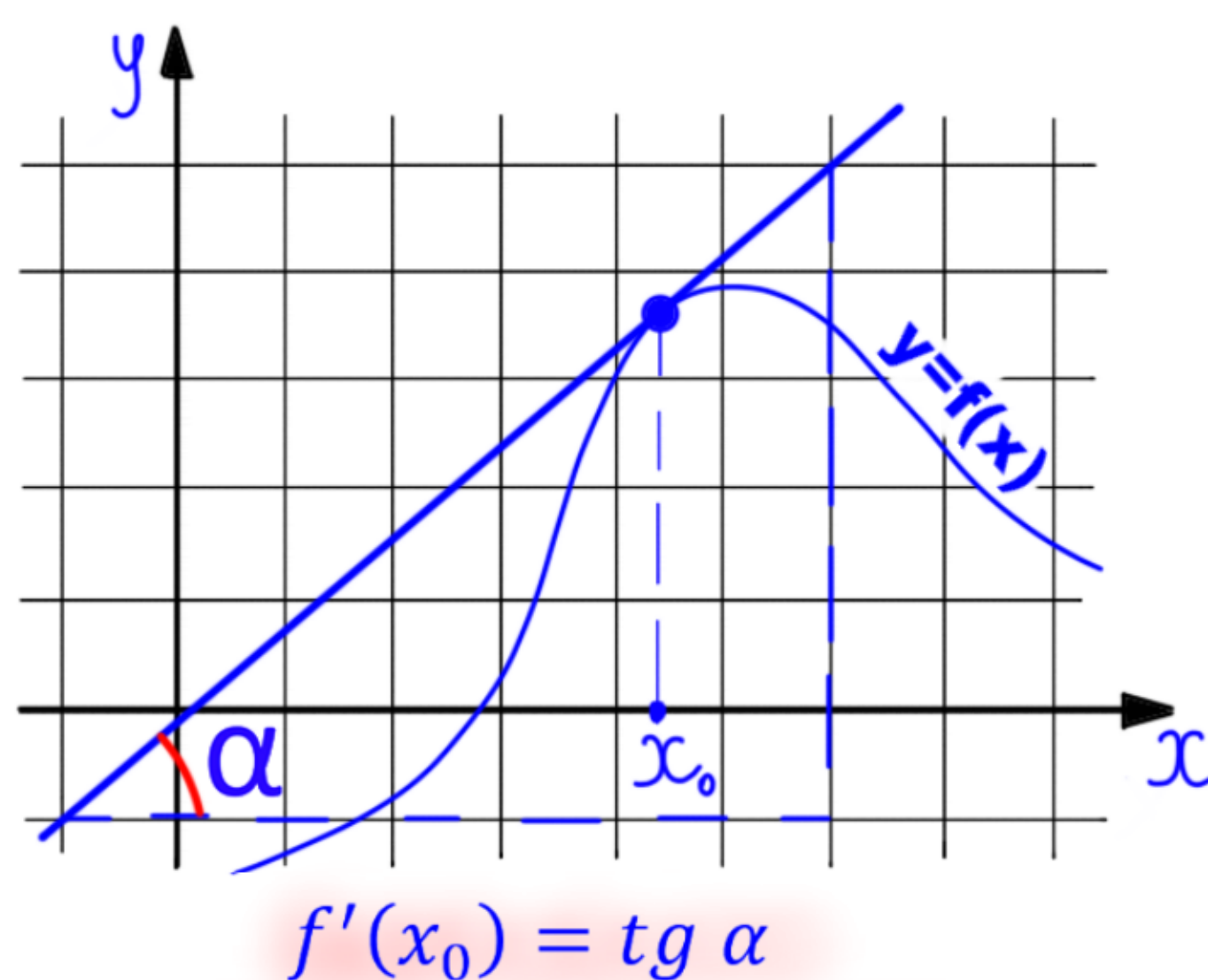


ПРОИЗВОДНАЯ (8 задание)

Если дан график производной



Зеленые участки (выше икс): возрастание функц.
Желтые участки (ниже икс): убывание функц.



(угол берется между осью x (или параллелями к ней) и касательной! Если убывает (касательная вниз), то перед tg ставить минус!)

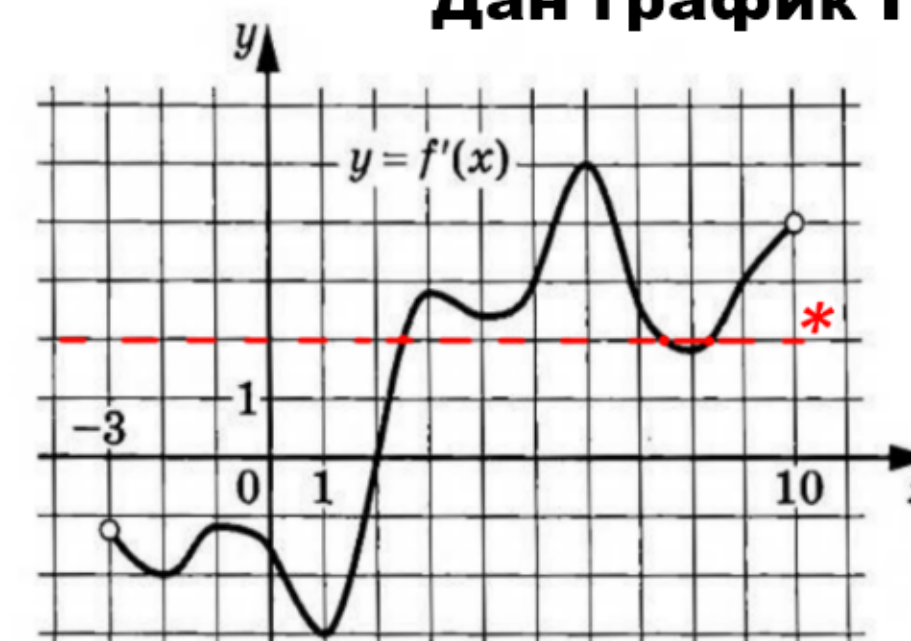
Если дан график самой функции



Производная положительная когда функция растёт
Производная отрицательна когда функция убывает

примеры

Дан график ПРОИЗВОДНОЙ функции



1. Промежуток убывания $(-3; 2)$
2. Промежуток возрастания $(2; 10)$
3. Точка минимума 2
4. Касательные параллельны графику $y=2x-3$ в 3-х точках*

$$y = (x^2 - 10x + 10) \cdot e^{2-x}$$

$$1) y' = (x^2 - 10x + 10)' \cdot e^{2-x} + (x^2 - 10x + 10) \cdot (e^{2-x})'$$

$$y' = (2x - 10) \cdot e^{2-x} + (x^2 - 10x + 10) \cdot e^{2-x} \cdot (-1)$$

Упростим выражение:

$$y' = e^{2-x} (2x - 10 + (x^2 - 10x + 10) \cdot (-1))$$

$$y' = e^{2-x} (2x - 10 - x^2 + 10x - 10)$$

$$y' = e^{2-x} (-x^2 + 12x - 20) ***$$

$$2) y' = e^{2-x} (-x^2 + 12x - 20) = 0$$

$$e^{2-x} = 0 (\emptyset) \text{ или } -x^2 + 12x - 20 = 0, x_1 = 10; x_2 = 2$$

$$3) \text{ Мин. значение функции (при } x=2):$$

$$y = (2^2 - 10 \cdot 2 + 10) \cdot e^{2-2} = -6$$

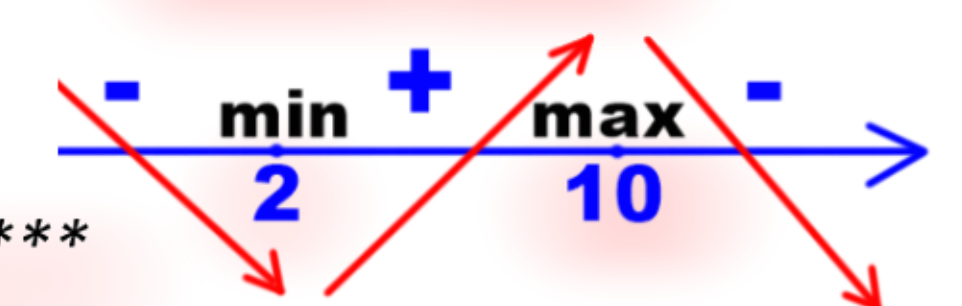
Знаки определяем по выражению ***

Значение находим по начальной

Лайфхак: если просят значение функции, то

степень e должна превратиться в $0 \Rightarrow x=2$.

Редко скобка перед e может равняться нулю



ТРИГОНОМЕТРИЯ



$$\begin{cases} \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha \\ \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha \\ \sin(-\alpha) = -\sin \alpha \\ \cos(-\alpha) = \cos \alpha \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} / \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha / \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

(или $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$, или $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$)

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \quad \text{когда нужно из тангенса получить синус или косинус}$$

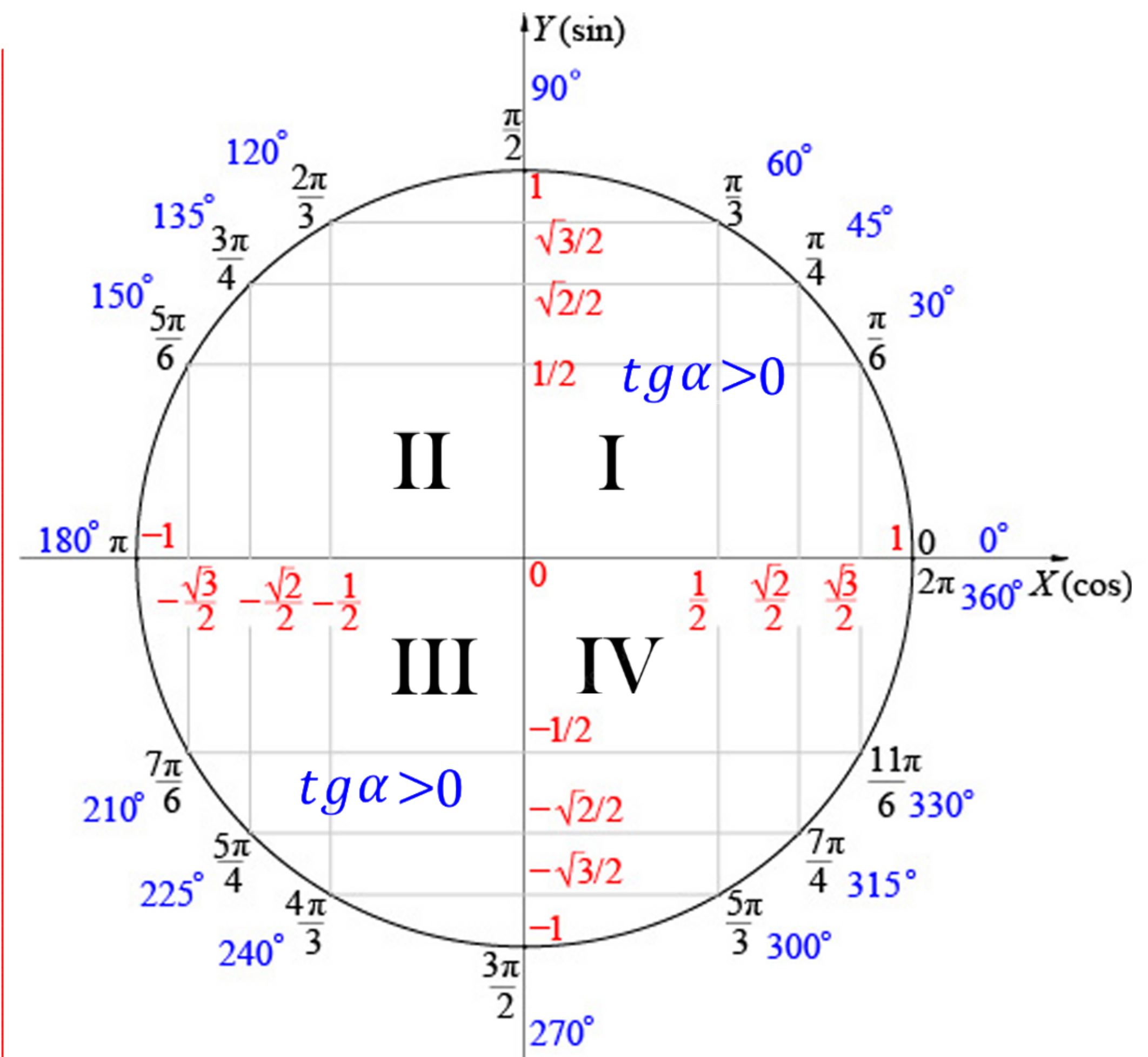
Формулы приведения

Упрощение углов вида: $\pi + \alpha$, $5\pi - \alpha$, $\frac{7\pi}{2} + \alpha$ и т.д.

(! Только для **ПИ** и **ПИ ПОПОЛАМ**, остальное не формулы приведения!) в два этапа:

- 1) Если есть деление на 2 (сколько-то $\pi/2$ (верхние и нижние углы окружности)) функцию меняем на противоположную ($\sin$ на $\cos$, tg на ctg и т.д.), иначе оставляем без изменений.
- 2) Поставить перед получившейся функцией знак, соответствующий первоначальной функции (выбирать по четверти числового круга для изначальной функции)

Если в задании дали цифры, например $\sin 64^\circ$ и $\cos 26^\circ$ это тоже формулы приведения. $\sin 64^\circ = \cos 26^\circ$ ($64 + 26 = 90$)



α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0	-

Формулы $\sin(\alpha + \beta)$ и $\cos(\alpha + \beta)$ даются в справочнике перед ЕГЭ и почти никогда не пригождаются

Текстовые задачи (10 задание)

Задачи на сплавы и смеси

$$\boxed{\text{конц}\%1 \cdot m_1} + \boxed{\text{конц}\%2 \cdot m_2} = \boxed{\text{конц}\%3 \cdot (m_1 + m_2)}$$

$$\text{конц}\%1 \cdot m_1 + \text{конц}\%2 \cdot m_2 = \text{конц}\%3 \cdot (m_1 + m_2)$$

Если добавили чистой воды: $\text{конц}\%_{\text{воды}} = 0$; $m_1 + m_2 + m_3$.

Задачи на движение по прямой или воде

Составить уравнение: $t_1 - t_2 = t$

Или $t_1 + t_2 = t$, если ВСЕГО затрачено времени

где $t_1 = \frac{S}{v_1}$ - (время медленного) / (большее время движения туда или обратно) / (время против течения), тогда $v_1 = v_{\text{лодки}} - v_{\text{реки}}$;

$t_2 = \frac{S}{v_2}$ - (время быстрого) / (меньшее время движения туда или обратно) / (время по течению)

тогда $v_2 = v_{\text{лодки}} + v_{\text{реки}}$;

t - разница (или сумма) времени медленного и быстрого или против течения и по течению или время стоянки.

Если про путь в км ничего не сказано (только: проехали путь/половину пути), то $S=1$.

Задачи на работу

1. Если сказали что кто-то выполнил заказ быстрее, составить уравнение $t_1 - t_2 = t$

где $t_1 = \frac{A_1}{p_1}$ - время медленного;

A_1 - работа/количество деталей;

p_1 - производительность;

$t_2 = \frac{A_2}{p_2}$ - время быстрого;

A_2 - работа/количество деталей;

p_2 - производительность.

2. Если задача на совместное выполнение работы

$$\frac{A}{p_1} + \frac{A}{p_2} + \frac{A}{p_3} = \frac{A}{p_{\text{общ}}}$$

где $p_{\text{общ}}$ - общая скорость выполнения работы.

Если про работу ничего не сказано, то $A=1$.

9 задание

1. Если в квадратном уравнении просят найти время и получилось два положительных корня, выбирай меньший.

2. В задаче на линзы из $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$ выражаем

$$d_1 = \frac{d_2 f}{d_2 - f} \text{ и подставляем } d_2 \text{ наибольшую.}$$

3. Задачи на удлинение рельс ($l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha t^\circ)$)

$$t^\circ = \frac{100x}{1,2l_0}, \text{ где } x - \text{удлинение.}$$

ГРАФИКИ (11 задание)

Ось абсцисс – x / Ось ординат – y

Если просят найти точку пересечения графиков, то приравняем их функции $f(x)=g(x)$

Неизвестные коэффициенты (a, b, c, k и т.д.) можно найти через систему уравнений.

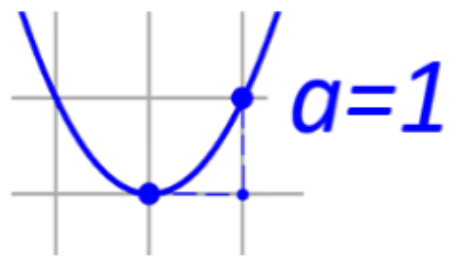
Сколько неизвестных – столько точек на графике нужно взять. В любой непонятной ситуации.

Парабола

$$y = ax^2 + bx + c$$

c – точка пересечения графика и оси y .

Если ветви параболы вниз – a отрицательна.



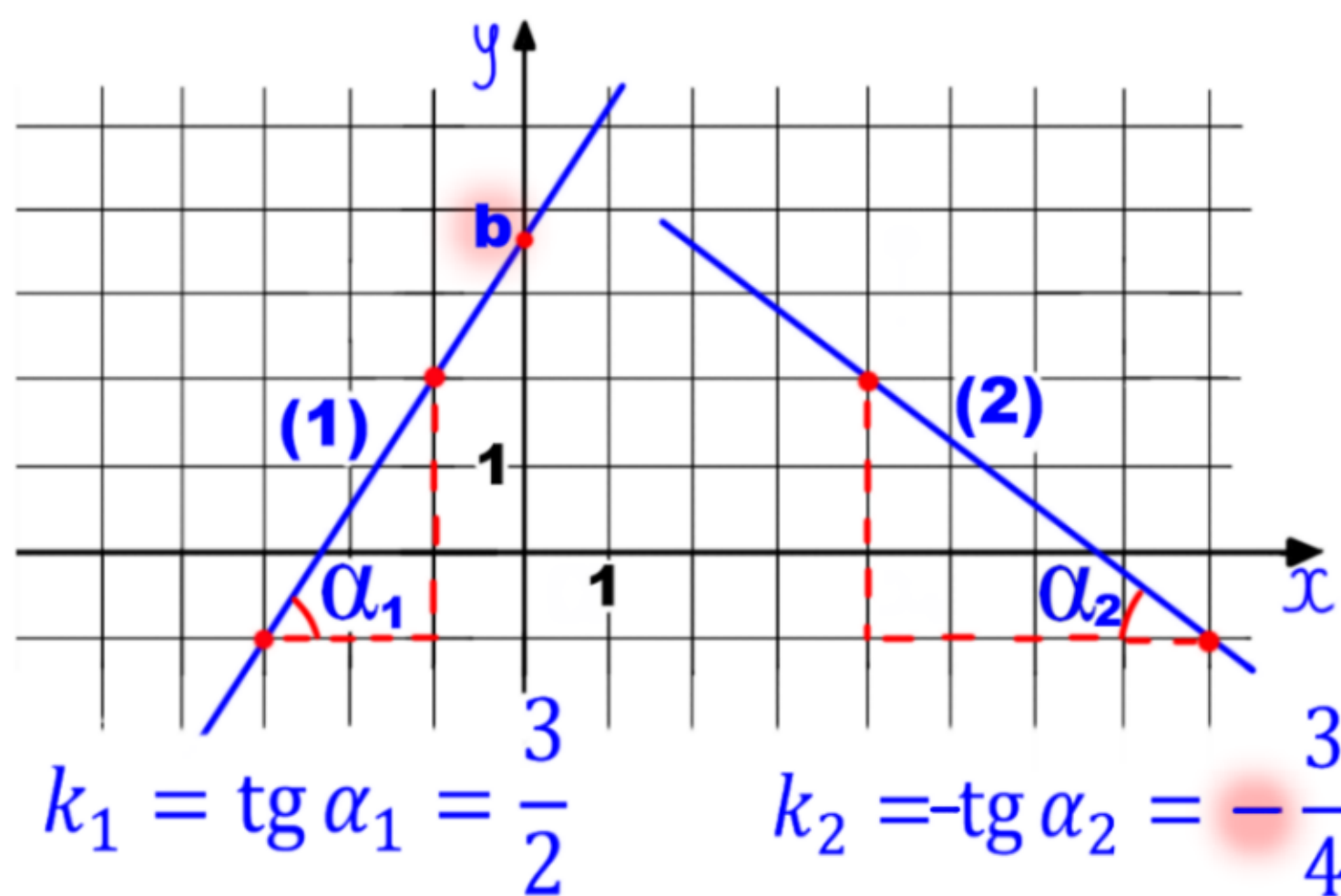
в остальных случаях
находить через систему

b – сама по себе ни за что не отвечает

Прямая

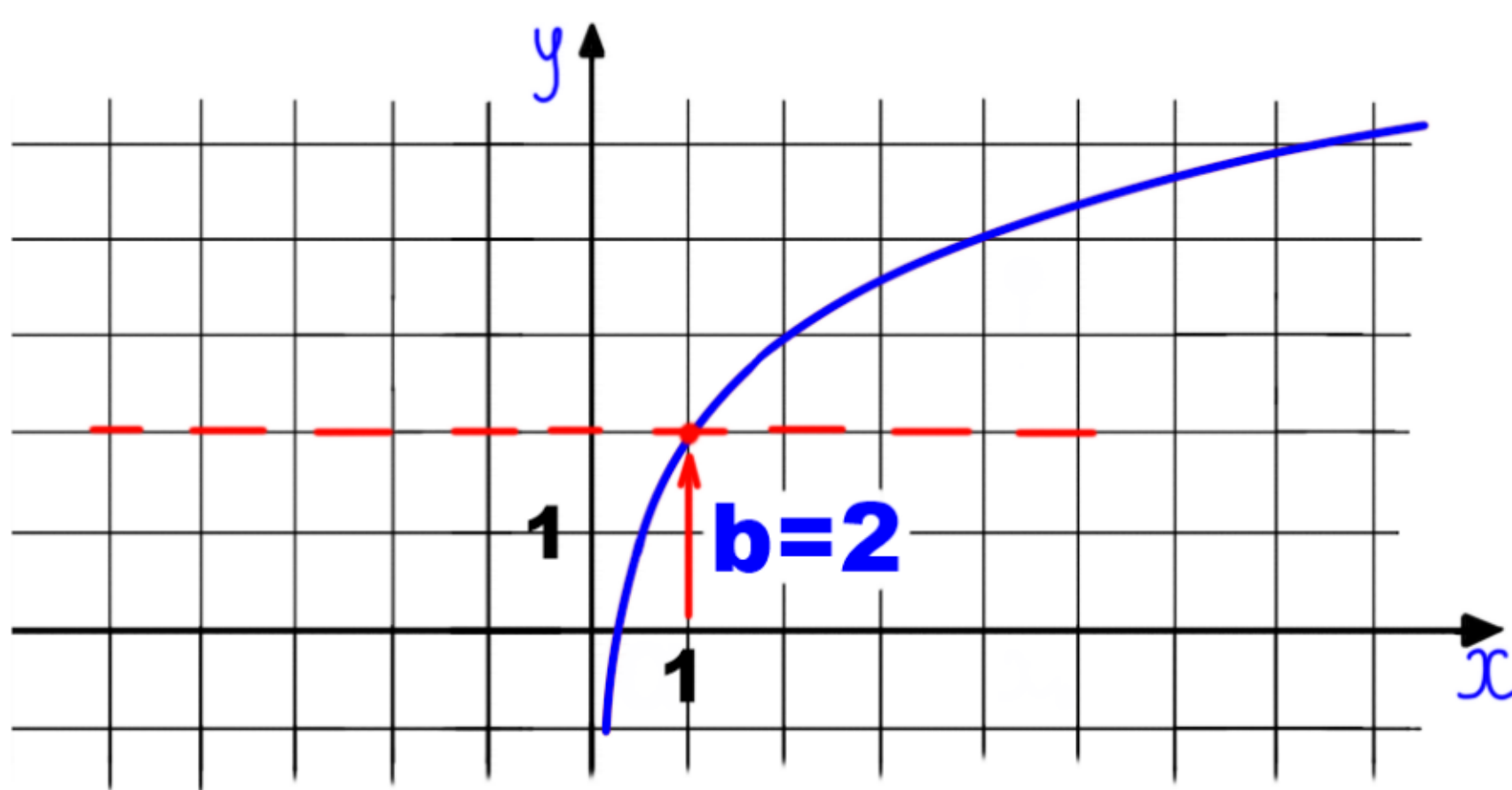
$$y = kx + b$$

Если b не целая – находить подстановкой в уравнение прямой



Логарифм

$$f(x) = \log_a x + b$$



Обычный график обязательно проходит через точку $(1;0)$!

$$f(x) = \log_a(x + c) + b$$

b – смещение графика вниз/вверх относительно 1 по y ; c – смещение влево/вправо с обратным знаком относительно 1 по x .

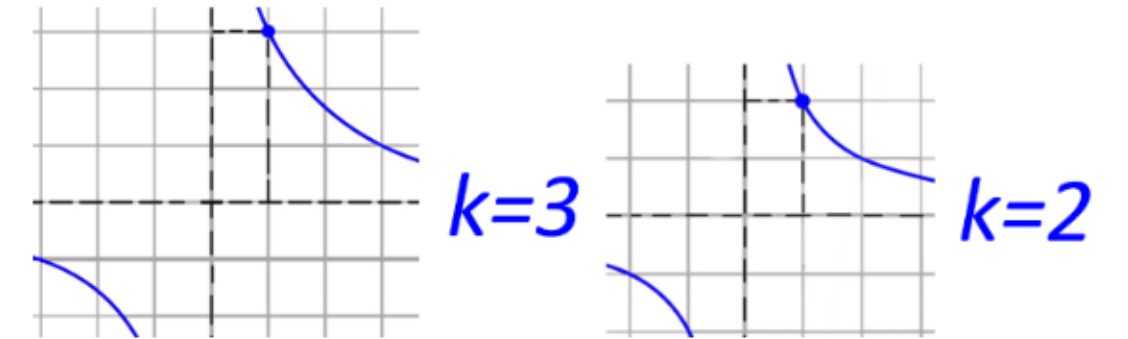
Гипербола

$$y = \frac{k}{x + b} + c$$

Простая гипербола симметрична началу координат.

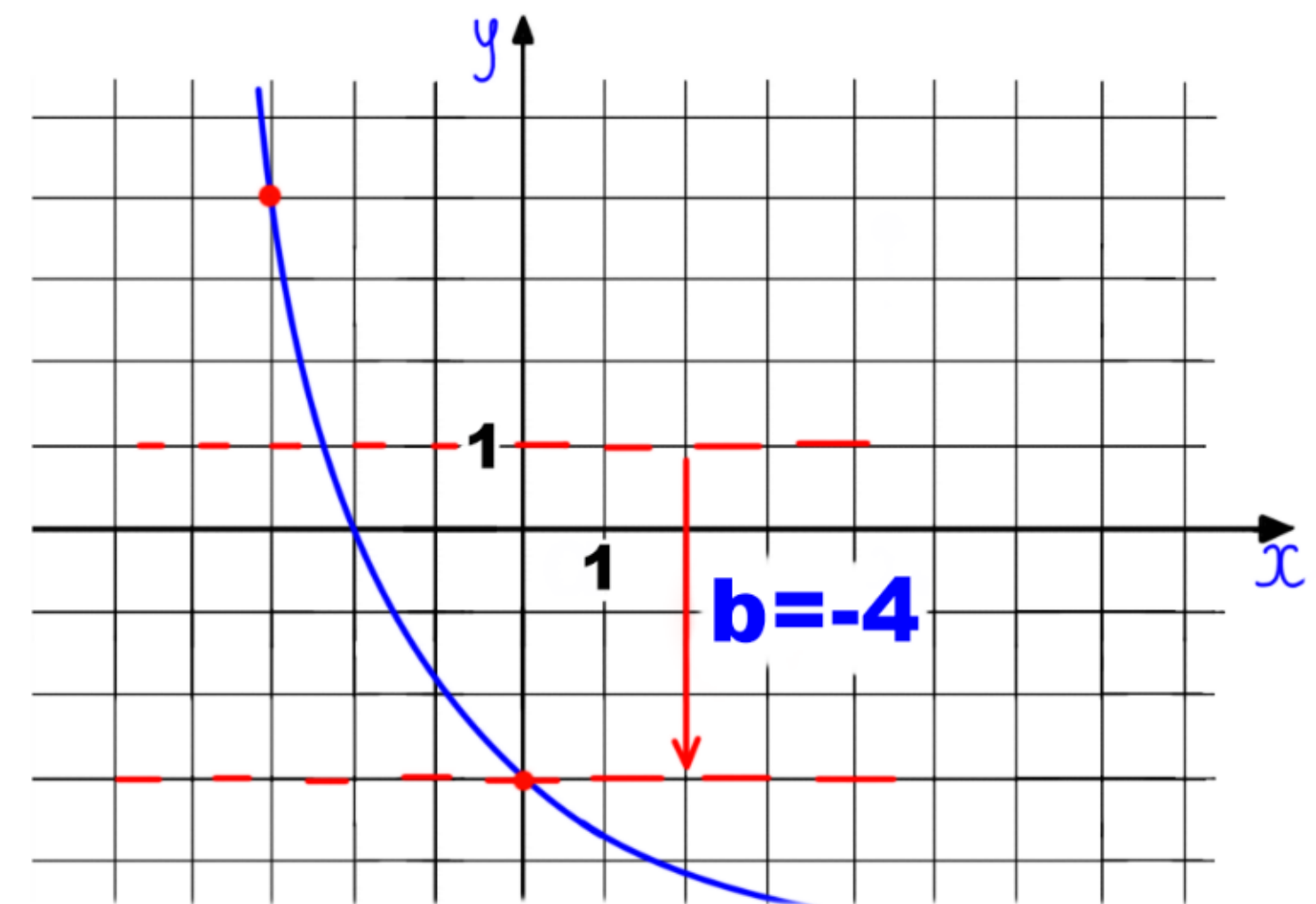
b – смещение по оси x с обратным знаком.

c – смещение по оси y .



Показательная функция

$$f(x) = a^x + b$$



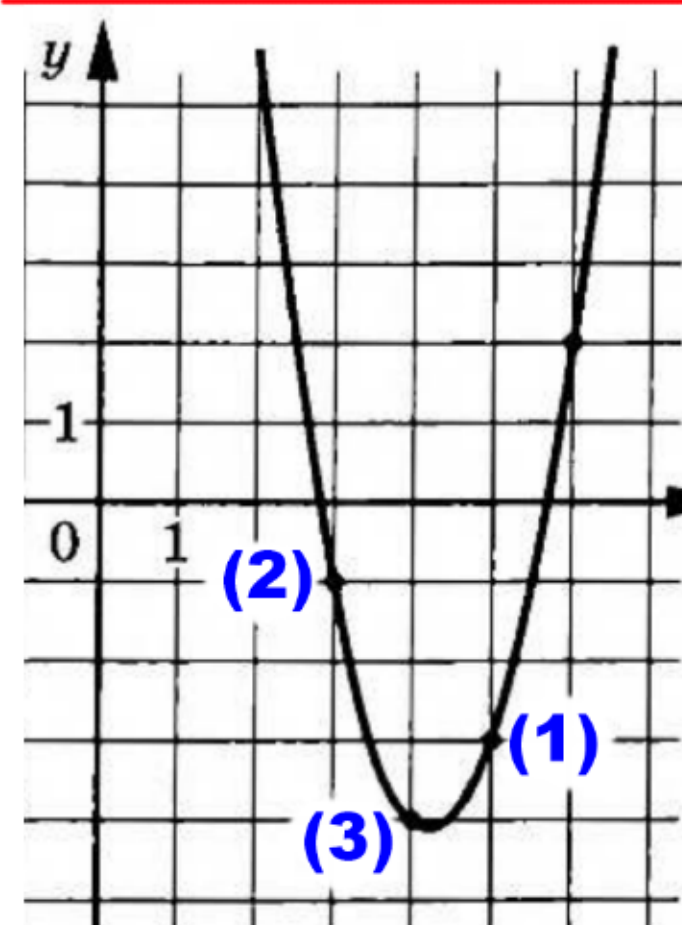
Обычный график обязательно проходит через точку $(0;1)$!

$$f(x) = a^{x+c} + b$$

b – смещение графика вниз/вверх относительно 1 по y ; c – смещение влево/вправо с обратным знаком относительно 1 по x .

На графике могут специально не отметить самые удобные точки. Особенно в показательных и логарифмических функциях. Если график точно проходит через удобную точку на оси X или Y обязательно подставляй ее координаты.

пример



$$y = ax^2 + bx + c$$

3 неизвестных: возьмем три любые точки:

(1) $(5; -3)$; (2) $(3; -1)$; (3) $(4; -4)$ составим

систему и решим:

$$\begin{cases} -3 = 5^2a + 5b + c \\ -1 = 3^2a + 3b + c \\ -4 = 4^2a + 4b + c \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -3 - 25a - 5b \\ -1 = 9a + 3b - 3 - 25a - 5b \\ -4 = 16a + 4b - 3 - 25a - 5b \end{cases}$$

упростим (приведем подобные, поделим на 2 второе ур-ние)

$$\begin{cases} c = -3 - 25a - 5b \\ 1 = -8a - b \\ -1 = -9a - b \end{cases} \quad \begin{cases} \text{Выразим из 2-ого } b \text{ и} \\ \text{подставим в третье:} \end{cases} \quad \begin{cases} c = -3 - 25a - 5b \\ b = -8a - 1 \\ -1 = -9a - (-8a - 1) \end{cases}$$

Из последнего $a=2$, тогда $b=-8 \cdot 2 - 1 = -17$



youtube.com/@ProfessorFOS

vk.com/professorfos100

t.me/professorfos